

Mathématique pour l'électronique
Séries de Fourier, transformées intégrales :
Cauchy, Dirac, Fourier, Heaviside, Laplace,
Riemann, Shannon et les autres...
avec exercices corrigés

Franck Luthon

5 février 2024

Avant-propos

Le traitement du signal est la discipline à l'interface entre la mathématique et la physique. Les ingénieurs électroniciens ou les techniciens de maintenance sont confrontés en permanence à cette interface : en effet, tout système industriel comporte des capteurs et des actionneurs qui sont le siège de signaux qu'il faut savoir traiter, analyser, filtrer et transmettre, en vue d'agir sur les processus, contrôler et réguler les machines, interpréter les informations et prendre les décisions adéquates pour un fonctionnement optimal des installations.

La disponibilité de langages de programmation avec des bibliothèques riches et faciles d'usage telles que Matlab, Scilab, Python ou LabVIEW qui fournissent des algorithmes standard très répandus et performants, comme la [Fast Fourier Transform \(FFT\)](#), permet désormais à des non-spécialistes de tester ou simuler leurs applications.

Le livre se veut une boîte à outils à l'usage de l'électronicien : on présente l'essentiel des formules mathématiques utiles à l'ingénieur, mais on y trouve très peu de démonstrations. Cet ouvrage sera aussi utile à tout enseignant universitaire qui recherche un manuel contenant des sujets d'exercices et de programmation avec les solutions, qu'il pourra proposer à ses étudiants pour les entraîner ou les évaluer.

Le livre comporte une première partie de cours portant sur les outils mathématiques de l'ingénieur, et une seconde partie applicative avec une centaine d'exercices et problèmes corrigés, et des sujets de travaux pratiques portant sur la programmation de calculs et de traitements simples. Ce manuel de mathématique du signal pour l'ingénieur se veut équilibré, en terme de répartition entre ces deux parties, chacune occupant une moitié du volume.

Le choix éditorial du contenu de l'ouvrage s'articule comme suit : le premier outil présenté est la série de Fourier (avec comme chapitres préliminaires les suites et les séries), le deuxième outil est la transformée de Laplace (avec comme chapitres préliminaires les équations différentielles et l'intégration des fonctions de la variable complexe), le troisième outil est la transformée de Fourier (qui trouve son application essentielle en traitement de signal analogique), enfin le

dernier outil est la transformée en Z (qui trouve son application non seulement en traitement de signal numérique, mais aussi en automatique discrète).

Les liens entre le cours et les exercices sont matérialisés par un numéro de paragraphe encadré en gras afin de faciliter les renvois pour le lecteur (par exemple **§13.95** renvoie au dernier exercice du chapitre 13). Chaque exercice requiert environ trente minutes pour sa résolution ; les problèmes complets plus longs à la fin du chapitre sont quant à eux calibrés pour des séances d'une heure et demie. Pour les quelques sujets qui sont repris d'autres ouvrages, la source en est citée.

Un complément électronique de l'ouvrage est disponible en ligne sur le site des éditions Ellipses. Il comporte les fichiers correspondant aux programmes présentés dans les divers chapitres, et aux simulations des exercices.

Remerciements

J'adresse avant tout mes remerciements aux trois professeurs de mathématique qui m'ont le plus marqué en tant qu'étudiant postbac, que ce soit par leur personnalité, par la qualité de leur enseignement, ou par la profondeur de leur savoir mathématique : (i) mon professeur de Maths Sup Mr. J-Pierre Grivaux, qui, tel un Lucky Luke, écrivait au tableau plus vite que son ombre toutes les démonstrations mathématiques, sans jamais faire une seule erreur ; (ii) François Zadworny qui m'a fait découvrir toute la puissance et la beauté des transformées intégrales pendant ses cours d'amphi en école d'ingénieurs à Grenoble, avec en point d'orgue le fameux théorème des résidus ; (iii) enfin Jean-Baptiste Nugeyre, collègue mathématicien profondément humaniste et cultivé, avec qui j'ai eu le plaisir de modestement collaborer, en menant en binôme avec lui des séances de travaux dirigés en école d'ingénieurs, et qui semblait vivre parmi les objets mathématiques et les connaître, comme le commun des mortels vit au milieu et connaît les objets du quotidien. Je ne sais ce qu'ils sont devenus depuis que nos chemins se sont séparés, mais je respecte à jamais leur savoir et leur mémoire.

J'ai aussi une pensée pour mes deux professeures de maths de collège et de lycée, qui ont semé la graine, sans que j'en prenne conscience sur le moment : Madame Yvette Thieffry-Rollet, ma professeure principale en classe de troisième, à la fois puissante et bienveillante, puis Madame Danièle Dufour en première et terminale, un peu trop «maman» à mon goût d'adolescent révolté des années 1980.

Enfin, encore merci à ma sœur Martine pour sa relecture méticuleuse du manuscrit, après sa contribution de relectrice à mon premier ouvrage sur le traitement d'images [32] paru en 2021 aux mêmes éditions Ellipses, éditeur que je remercie d'avoir accepté de publier ma prose pour la deuxième fois¹. Et merci aussi à mon fidèle ami d'enfance Jean-Louis Besse, camarade de classe de la 6^e à Rambouillet jusqu'en Maths Sup au Lycée Chaptal à Paris, et grâce à qui j'ai pu retrouver les prénoms de mes anciens professeurs.

1. Le logiciel libre L^AT_EX [40] a servi pour produire ces livres.

Table des matières

1	Suite numérique	27
1.1	Définition	27
1.2	Limite	28
1.3	Critères de convergence	28
1.3.1	Théorème	28
1.3.2	Suites adjacentes	28
1.3.3	Critère de Cauchy	28
1.4	Exemple fondamental	29
1.5	Suite récurrente	29
1.5.1	Définition	29
1.5.2	Suite arithmétique	29
1.5.3	Suite géométrique	30
1.6	Raisonnement par récurrence	30
2	Série numérique	31
2.1	Définition - Propriétés de convergence	31
2.1.1	Série géométrique	32
2.1.2	Condition nécessaire de convergence	32
2.1.3	Condition de Cauchy	32
2.1.4	Série absolument convergente	33
2.2	Série à termes positifs	33
2.2.1	CNS de convergence	33
2.2.2	Comparaison entre séries	33
2.2.2.1	Exemples	33
2.2.2.2	Critère de convergence	33
2.2.3	Comparaison de nature de série et d'intégrale généralisée	34
2.2.4	Critère de Riemann : règle $n^\alpha u_n$	34
2.2.5	Comparaison entre série positive et série géométrique	34
2.2.5.1	Théorème	34
2.2.5.2	Critère de Cauchy	35

2.2.5.3	Critère de d'Alembert	35
2.2.5.4	Exemples	35
2.3	Série alternée	35
2.3.1	Définition	35
2.3.2	Théorème	35
2.3.2.1	Preuve	36
2.3.2.2	Exemple : série harmonique alternée	36
2.3.3	Règle d'Abel	36
2.4	Résumé	36
2.5	Série entière	37
2.5.1	Définition	37
2.5.2	Rayon de convergence	37
2.5.2.1	Lemme d'Abel	37
2.5.2.2	Définition du rayon de convergence	37
2.5.3	Détermination du rayon de convergence	37
2.5.3.1	Critère de Cauchy	37
2.5.3.2	Règle de Cauchy	37
2.5.3.3	Critère de d'Alembert	38
2.5.3.4	Règle de d'Alembert	38
3	Développement en série de Fourier	39
3.1	Série trigonométrique	40
3.2	Théorème de Fourier	40
3.3	Condition de validité	40
3.4	Point de discontinuité (phénomène de Gibbs)	41
3.5	Fonction définie dans un intervalle quelconque	41
3.6	Terminologie	42
3.7	Propriétés de symétrie	42
3.7.1	Fonction paire	42
3.7.2	Fonction impaire	43
3.8	Formule de Bessel-Parseval	43
3.9	Définition de la valeur efficace	43
3.10	Intégration et dérivation	43
3.10.1	Intégration	44
3.10.2	Dérivation	45
3.11	DSF exponentiel	46
4	Equation différentielle	47
4.1	Généralités	47
4.1.1	Définition	47
4.1.2	Théorème	48

4.2	Equation différentielle du 1 ^{er} ordre	48
4.2.1	Equation différentielle à variables séparables	48
4.2.2	Equation différentielle homogène	48
4.2.2.1	Définition	48
4.2.2.2	Intégration par changement de fonction	48
4.2.2.3	Changement de variable en coordonnées polaires	49
4.2.3	Différentielle totale exacte	49
4.2.3.1	Forme générale	49
4.2.3.2	Intégration	50
4.2.4	Equation différentielle linéaire	50
4.2.4.1	Définition	50
4.2.4.2	Méthode d'intégration	50
4.2.4.3	Théorème	51
4.3	Equation différentielle linéaire d'ordre n	51
4.3.1	Définition	51
4.3.2	Equation sans second membre	51
4.3.2.1	Théorème 1	51
4.3.2.2	Wronskien	52
4.3.2.3	Théorème 2	52
4.3.2.4	Connaissance d'intégrales particulières $y_{p_0}(x)$	52
4.3.2.5	Exemple	52
4.3.3	Equation avec second membre	53
4.3.3.1	Théorème	53
4.3.3.2	Solution particulière : variation de la constante	53
4.4	EDL à coefficients constants	54
4.4.1	Solution générale sans 2 nd membre	54
4.4.2	Solution particulière avec 2 nd membre	55
4.4.3	Solution globale	55
5	Fonction de la variable complexe	57
5.1	Nombre complexe	57
5.1.1	Définition	57
5.1.2	Somme	57
5.1.3	Produit	58
5.1.4	Quotient	58
5.1.5	Complexe conjugué	58
5.1.6	Racines n -ièmes	59
5.2	Fonction de la variable complexe	59
5.2.1	Continuité	59
5.2.2	Dérivabilité	60
5.2.2.1	Exemple 1	60

5.2.2.2	Exemple 2	60
5.2.3	Relations de Cauchy	60
5.2.4	Réciproque	60
5.2.5	Holomorphie et analyticité	60
5.2.5.1	Définitions	60
5.2.5.2	Propriétés	61
5.2.5.3	Exemples de fonctions holomorphes	61
5.2.5.4	Remarque	61
5.2.6	Harmonic�t�	62
5.2.7	Réciproque	62
5.2.8	Points singuliers	62
5.2.8.1	Définition	62
5.2.8.2	Singularité artificielle	62
5.2.8.3	Pôle d'ordre p	63
5.2.8.3.1	Exemple :	63
5.2.8.3.2	Définition :	63
5.2.8.4	Points singuliers essentiels	63
5.2.8.5	Cas du point à l'infini	63
5.2.9	Fonctions uniformes et multiformes	63
5.2.10	Notion de point critique	64
5.2.11	Exemple de la fonction racine	65
5.2.12	Notion de coupure et choix d'une détermination	65
5.2.12.1	Exemple 1 : $f(z) = \sqrt{z}$	66
5.2.12.2	Exemple 2 : $Z = f(z) = z^{1/n}$	67
5.2.12.3	Exemple 3 : $Z = \log z$	67
5.2.13	Définition générale de la notion de point critique	67
5.2.13.1	Points critiques des fonctions élémentaires	67
5.2.13.2	Généralisation aux autres fonctions multiformes	68
5.2.13.3	Cas du point à l'infini	68
5.2.13.4	Cas des pôles et des zéros	68
5.2.13.5	Exemple 1	69
5.2.13.6	Exemple 2	69
5.3	Fonction définie par une série entière	69
5.3.1	Série de la variable complexe	69
5.3.2	Convergence absolue	69
5.3.3	Rappel sur la convergence des séries	69
5.3.3.1	Condition nécessaire de convergence	70
5.3.3.2	Théorème de Cauchy	70
5.3.3.3	Critère de Cauchy	70
5.3.3.4	Critère de d'Alembert	70
5.3.3.5	Comparaison avec une intégrale	70

5.3.3.6	Série de Riemann	71
5.3.4	Convergence uniforme	71
5.3.4.1	Théorème de Cauchy	71
5.3.4.2	Règle de Weierstrass	71
5.3.4.3	Convergence absolue \Rightarrow Convergence uniforme	71
5.3.4.4	Critère d'Abel	71
5.3.4.5	Intégration d'une série CU	72
5.3.5	Série entière de la variable complexe	72
5.3.5.1	Définition	72
5.3.5.2	Convergence	72
5.3.5.3	Théorème	72
5.3.5.4	Cas particulier	73
5.3.5.5	Généralisation	73
5.3.6	Développement en série de Taylor	73
5.3.6.1	Développement de Mac-Laurin	73
5.3.6.2	Fonction analytique	73
5.3.7	Fonctions entières	74
5.3.7.1	Fonction exponentielle $f(z) = e^z$	74
5.3.7.2	Fonctions trigonométriques	74
5.3.7.3	Fonctions hyperboliques	74
5.3.7.3.1	Remarque	75
5.3.7.3.2	Possibilité d'avoir $\cos z > 1$	75
5.3.8	Série géométrique et fonction $\log(1+z)$	75
5.3.9	Convention	75
5.4	Intégration d'une fonction de la variable complexe	76
5.4.1	Intégrale de Cauchy	76
5.4.1.1	Définition	76
5.4.1.2	Intégration des séries	76
5.4.2	Théorème de Cauchy	77
5.4.3	Notion de primitive (application du théorème de Cauchy)	78
5.4.3.1	Théorème	78
5.4.3.2	Preuve	78
5.4.4	Formule de Cauchy	79
5.4.5	Développement de $f(z)$ holomorphe en série entière . . .	80
5.4.5.1	Développement en série entière sur un contour	80
5.4.5.2	Existence des dérivées	82
5.5	Théorème des résidus	82
5.5.1	Développement en série de Laurent en un point singulier	82
5.5.2	Preuve	82
5.5.3	Cas d'un pôle d'ordre p	84
5.5.4	Théorème des résidus	84

5.5.4.1	Résidu d'une fonction uniforme	84
5.5.4.2	Théorème des résidus	84
5.5.4.3	Calcul de résidus	85
5.5.4.3.1	Cas d'un pôle simple	85
5.5.4.3.2	Pôle multiple :	86
5.5.4.3.3	Cas d'un point singulier essentiel : . .	86
5.5.4.3.4	Résidu au voisinage de l'infini :	86
5.5.4.4	Extension du théorème des résidus	87
5.5.4.4.1	Cas d'un nombre fini de singularités .	87
5.5.4.4.2	Cas d'une fraction rationnelle :	88
5.6	Application au calcul d'intégrales finies	88
5.6.1	Théorème 1	88
5.6.2	Théorème 2	89
5.6.3	Lemme 1 de Jordan	89
5.6.4	Lemme 2 de Jordan	89
5.6.5	Calcul d'intégrales définies (fonctions uniformes)	89
5.6.5.1	Fraction rationnelle $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$	89
5.6.5.2	Intégrale de fonction trigonométrique	90
5.6.5.3	Intégrale renfermant une exponentielle complexe	90
5.6.5.4	Fonction exponentielle $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{imx} g(e^{kx}) dx$.	91
5.6.6	Intégrales de fonctions multiformes	92
5.6.6.1	Précaution et conseil	92
5.6.6.2	Fonction Racine $I = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$	92
5.6.6.3	Racine et puissance non entière	93
5.6.6.4	Fonction logarithme	94
6	Transformée de Laplace	95
6.1	Intégrale de Laplace	95
6.1.1	Définition	95
6.1.2	Abscisse de convergence	96
6.1.3	Quelques cas particuliers	97
6.1.3.1	Fonction unité de Heaviside $\mathcal{U}(t)$ et $\mathcal{U}(t - t_0)$.	97
6.1.3.2	Impulsion	97
6.1.3.3	Impulsion de Dirac	98
6.1.3.4	Fonction puissance $f(t) = t^\nu$	98
6.1.3.5	Fonction exponentielle $f(t) = e^{at}$ et $f(t) = t^n e^{at}$	98
6.2	Règles de Heaviside	99
6.2.1	Linéarité de la TL	99
6.2.2	Première règle de Heaviside	99
6.2.3	Deuxième règle de Heaviside	99
6.2.4	Applications	100

6.2.4.1	Recherche de transformée	100
6.2.4.2	Recherche de l'original	100
6.3	Inversion de la transformée de Laplace	101
6.3.1	Définition de $\mathcal{U}(t)$ par une intégrale de Bromwich-Wagner	101
6.3.2	Intégrale de Mellin-Fourier	101
6.3.3	Calcul de l'intégrale de Mellin-Fourier	102
6.3.3.1	Contour de Bromwich - Lemme de Jordan . . .	102
6.3.3.1.1	Contour de Bromwich d'une fonction .	102
6.3.3.1.2	Intégrale de Bromwich-Wagner : . . .	102
6.3.3.1.3	Lemme de Jordan généralisé :	102
6.3.3.1.4	Contour équivalent	102
6.3.3.2	Principe de calcul	103
6.3.3.3	Exemple d'une fonction uniforme	104
6.4	Règles opératoires du calcul symbolique	104
6.4.1	Dérivation et intégration par rapport à un paramètre . .	104
6.4.2	Changement d'échelle	105
6.4.3	Translation de la variable concrète t et symbolique p . .	105
6.4.4	Théorème du produit de Borel (convolution)	105
6.4.5	Dérivation et intégration par rapport à t	105
6.4.6	Théorèmes de la valeur initiale et finale	106
6.4.7	Dérivation et intégration par rapport à la variable p . .	106
6.5	Application de la TL : fonction de transfert	106
6.5.1	Système linéaire SLIT	106
6.5.2	Réponse impulsionnelle et convolution	107
6.5.3	Distribution de Dirac	107
6.5.4	Intérêt de la TL pour l'étude des systèmes	107
6.5.5	Réponse harmonique	108
6.6	EDL à coefficients constants	108
6.6.1	Méthode classique	108
6.6.2	Méthode symbolique	109
7	Transformée de Fourier	111
7.1	Définition	111
7.2	Règles opératoires	112
7.2.1	Linéarité	112
7.2.2	Transposition	112
7.2.3	Conjugaison	112
7.2.4	Changement d'échelle	112
7.2.5	Translation de la variable concrète t (règle du retard) .	113
7.2.6	Translation de la variable symbolique : règle de modulation	113
7.2.7	Dérivation et intégration par rapport à t	113

7.2.7.1	Généralisation	113
7.2.7.2	Intégration	114
7.2.8	Dérivation par rapport à ν	114
7.2.9	Théorème de convolution	114
7.2.10	Formule de Parseval-Plancherel	115
7.2.11	Egalité fondamentale (TF des distributions)	115
7.2.12	Moyen mnémotechnique	115
7.3	Relation entre TF et TL	115
7.3.1	Cas où l'on suppose que $f(t) = f(t)\mathcal{U}(t)$	115
7.3.2	Transformée inverse	116
7.3.3	Cas où $f(t) \neq 0$ pour $t < 0$	116
7.4	TF de distributions	116
7.4.1	TF de $\delta(t - a)$	116
7.4.2	TF de $f(t)=1$ au sens des distributions	117
7.4.3	TF de $\exp(i2\pi at)$	117
7.4.4	TF des sinusoides $\cos(2\pi at)$ et $\sin(2\pi at)$	117
7.4.5	Fonctions propres de la TF	117
7.4.5.1	Peigne $p(t)$	118
7.4.5.2	Loi de Laplace-Gauss	118
8	Transformée de Fourier discrète	119
8.1	Introduction	119
8.2	Conversion analogique-numérique	120
8.2.1	Échantillonnage et quantification	120
8.2.2	Echantillonnage temporel	120
8.3	Transformée de Fourier discrète	122
8.3.1	TFDT d'un signal causal	122
8.3.2	Troncature temporelle	123
8.3.3	Pondération temporelle	124
8.3.4	Echantillonnage fréquentiel - TFD	126
9	Transformée en Z	129
9.1	Introduction sur l'échantillonnage	129
9.2	Rappel sur les distributions	130
9.2.1	Fonction d'échantillonnage (peigne de Dirac)	130
9.2.2	Fonction échantillonnée	130
9.3	TL d'une fonction échantillonnée	130
9.4	TZ des puissances de t	131
9.5	TZ de $f(t)\exp(-at)$	131
9.6	Théorème	131
9.7	Translation temporelle	132

9.7.1	Retard	132
9.7.2	Avance	132
9.8	Théorème de la valeur initiale	133
9.9	Théorème de la valeur finale	133
9.10	Formule d'inversion	134
9.11	Propriété périodique de $\phi^*(p)$ et relation avec $\phi(p)$	135
9.12	Expression de $\phi^*(p)$ à l'aide des résidus	136
9.13	Dérivation et intégration par rapport à un paramètre	136
9.14	Théorème de Parseval	137
9.15	Théorème de convolution discrète	137
10	Traitement de signal analogique	139
10.1	Introduction	139
10.1.1	Définitions	139
10.1.2	Systèmes analogiques	139
10.2	Signaux analogiques	140
10.2.1	Typologie des signaux	140
10.2.2	Energie et puissance	141
10.2.3	Corrélation	141
10.2.3.1	Autocorrélation	142
10.2.3.2	Corrélateur analogique	142
10.2.3.3	Intercorrélation	142
10.2.4	Dualité temps-fréquence	143
10.2.4.1	Durée utile - Support borné	143
10.2.4.2	Spectre utile - Spectre borné	143
10.2.4.3	Principe d'incertitude	144
10.2.5	Signal à bande étroite	144
10.2.5.1	Définition	144
10.2.5.2	Signal analytique	144
10.3	Filtres analogiques	145
10.3.1	Convolution	145
10.3.1.1	Calcul de la sortie d'un filtre	145
10.3.1.2	Chaînage de filtres	145
10.3.2	Réponse impulsionnelle et fonction de transfert	146
10.3.2.1	Filtre réalisable	146
10.3.2.2	Filtre stable	146
10.3.2.3	Filtres idéaux	147
10.3.3	Relations fondamentales des filtres	147
10.3.4	Filtre à bande étroite	148
10.3.4.1	Définition	148
10.3.4.2	Principe du changement de fréquence	148

10.3.4.3	Ampli sélectif accordable	149
10.3.4.4	Multiplexage en fréquence	149
10.4	Applications	150
10.4.1	Filtrage	150
10.4.1.1	Passe-bas (intégrateur)	150
10.4.1.2	Passe-haut (dérivateur)	150
10.4.1.3	Passe-bande	150
10.4.2	Modulation	151
10.4.2.1	Modulation d'amplitude	151
10.4.2.2	Démodulation	151
10.4.2.3	Modulation de fréquence	152
10.4.2.3.1	Fréquence instantanée :	152
10.4.2.3.2	Spectre :	152
10.4.2.3.3	Réalisation :	152
10.4.2.3.4	Démodulation :	152
10.4.3	Analyse spectrale	152
10.4.3.1	But	152
10.4.3.2	Principe	152
10.4.3.3	Mise en œuvre	153
10.4.3.4	Résolution fréquentielle	153
10.4.3.4.1	Pouvoir de résolution :	153
10.4.3.4.2	Troncature temporelle :	153
10.4.3.4.3	Exemple des audio-fréquences :	153
10.5	Signaux aléatoires : caractérisation et filtrage	154
10.6	Bruit	154
10.7	Filtrage optimal et détection	154
11	Traitement de signal numérique	155
11.1	Introduction	155
11.1.1	Généralités	155
11.1.2	Outils mathématiques	155
11.1.2.1	Transformée de Fourier discrète dans le temps	155
11.1.2.2	TFD et transformée en Z	156
11.1.3	Systèmes numériques	156
11.1.3.1	Equation aux différences	156
11.1.3.2	Produit de convolution discret	157
11.1.3.3	Fonction de transfert	157
11.2	Signaux numériques	157
11.2.1	Les 4 opérations de base	157
11.2.2	Signaux élémentaires et typologie	157
11.2.3	Corrélation	158

11.2.4	Echantillonnage	158
11.2.4.1	Théorème de Shannon	158
11.2.4.2	Echantillonnage naturel	158
11.2.4.3	Echantillonneur-bloqueur	159
11.2.5	Quantification	159
11.3	Filtres numériques	160
11.3.1	Causalité et stabilité	160
11.3.2	Système SLIT	160
11.3.3	Synthèse d'un filtre RIF	161
11.3.4	Synthèse d'un filtre RII	162
11.4	Filtrage	163
11.4.1	Linéaire	163
11.4.2	Non-linéaire	163
11.5	Analyse spectrale	163
11.5.1	Autocorrélation	163
11.5.2	Méthode non-paramétrique	164
11.5.3	Méthode paramétrique	164
12	Vade-mecum mathématique	165
12.1	Trigonométrie	165
12.2	Développements limités au voisinage de zéro	168
12.3	Décomposition des fractions rationnelles	169
12.4	Fonctions hyperboliques directes	170
12.5	Fonctions hyperboliques réciproques	171
12.6	Coniques	172
12.7	Rappels élémentaires	173
12.7.1	Dérivation et intégration	173
12.7.2	Unités exprimées en dB	175
12.7.2.1	Unité de mesure de tension : le dBv	175
12.7.2.2	Unité de mesure de puissance : le dBm	176
12.7.2.3	Unité de gain (en tension ou courant) : en dB	176
12.7.2.4	Remarques	176
12.7.3	Rappel sur les complexes	176
12.8	Distributions	177
12.8.1	Définition	177
12.8.2	Distribution de Dirac	177
12.9	Développement en série de Fourier	178
12.10	Tableau récapitulatif de la TL	179
12.11	Tableau récapitulatif de la TF	179
12.12	Tableau récapitulatif de la TZ	179
12.13	Tableau synthétique des transformées	179

12.14	Vade-mecum du calcul symbolique	184
12.15	Vade-mecum pour la transformée de Fourier	185
12.16	Vade-mecum sur la transformée en Z	186
13	Exercices	187
13.1	Trigonométrie	187
13.2	Nombre complexe	187
13.3	Dérivation	188
13.4	Intégration trigonométrique	189
13.5	Equation différentielle	189
13.6	Décomposition de fraction rationnelle	190
13.7	Intégration	190
13.8	Somme de Riemann	191
13.9	Nature des suites par comparaison	191
13.10	Suite associée	191
13.11	Somme de cosinus et sinus d'arcs en progression arithmétique	192
13.12	Paradoxes grecs	192
13.13	Suite définie implicitement	192
13.14	Suite de Fibonacci	193
13.15	Convergence de suites	193
13.16	Suite récurrente	193
13.17	Raisonnement assassin par récurrence	194
13.18	Nature des séries	194
13.19	Séries alternées	195
13.20	Comparaison avec une intégrale	195
13.21	Calcul de somme de série	195
13.22	Calcul de sommes de séries numériques	195
13.23	Rayon de convergence de série entière	195
13.24	Convergence de séries à termes positifs	196
13.25	Séries à termes positifs et négatifs	196
13.26	Développement d'un signal carré	196
13.27	Signal rectangulaire	197
13.28	Signal triangulaire pair	197
13.29	Redressement double alternance	197
13.30	Signal en dents de scie	198
13.31	Développement d'un signal triangulaire	198
13.32	Signal d'un onduleur	198
13.33	Décomposition en série de Fourier et calcul de série	199
13.34	Démonstration de la formule de Wallis	200
13.35	EDL du 1 ^{er} ordre : circuit RL série	200
13.36	EDL du second ordre	201

13.37Circuit RLC parallèle	201
13.38Régime apériodique	202
13.39Propagation d'un virus	202
13.40Calcul de transformées	203
13.41Résolution d'une équation différentielle	203
13.42Calcul d'un original	203
13.43Application électrique : circuit RC	204
13.44Circuit RLC série	204
13.45Généralisation de la notion d'impédance	204
13.46Etude de circuit	204
13.47Peigne de Dirac, convolution et échantillonnage	205
13.48Résolution d'équation différentielle	205
13.49Bode Nyquist du premier ordre	205
13.49.1 Fonctions élémentaires	205
13.49.2 Fonctions de transfert composées	206
13.50Amplificateur à résistance compensée	206
13.51Filtre correcteur à avance de phase	207
13.52Correcteur mécanique à avance de phase	207
13.53Calculs de transformée de Fourier	209
13.54Modulation d'amplitude et analyse spectrale	209
13.55Equation de diffusion de la chaleur	209
13.56Filtrage numérique	210
13.57Transformation directe et inverse	210
13.58Echantillonnage	211
13.59Résolution d'équation de récurrence par la TZ	211
13.60Transformée de Laplace	212
13.61Transformée de Fourier	212
13.62Transformée en Z	214
13.63Transformée de Laplace	214
13.64Transformée en Z	215
13.65Calcul de transformées de Laplace	215
13.66Calcul d'un original	216
13.67Etude d'une fonction périodique	216
13.68Transformée de Fourier	217
13.69Série entière	217
13.70Décomposition en série de Fourier	218
13.71Transformée de Laplace : résolution d'équation différentielle	218
13.72Transformée de Fourier : signal triangle	219
13.73DSF alternance positive	219
13.74Reconstitution d'un signal échantillonné : TFD	220
13.75TL : circuit RL série excité par une rampe	221

13.76	Développement en série de Fourier	222
13.77	Application de la transformée de Laplace	223
13.78	Calcul d'une transformée de Fourier	223
13.79	Série de Fourier : étude de pompe à pistons	224
13.79.1	Etude du cas $p = 3$	225
13.79.2	Etude du cas $p = 4$	225
13.79.3	Etude du taux d'irrégularité du débit	225
13.79.4	Etude du cas $p = 4$ à l'aide des séries de Fourier	226
13.80	Transformée de Laplace : étude de cuve de mélange	226
13.80.1	Conditions initiales nulles	227
13.80.2	Condition initiale non nulle	227
13.81	Transformée de Fourier d'une sinusoïde amortie	228
13.82	Développement en série de Fourier	228
13.83	Transformée de Laplace	229
13.84	Transformée de Laplace : équation différentielle	229
13.85	Développement en série de Fourier	230
13.86	Transformée de Fourier : signal triangulaire	230
13.87	Série de Fourier : application en analyse spectrale	231
13.88	Calcul de la somme d'une série numérique	232
13.89	Transformée de Laplace : étude d'un système du premier ordre	232
13.90	Transformée de Fourier	233
13.91	Oscillateur excité par un signal carré : DSF	234
13.92	Signal radar	235
13.93	Corrélateur analogique	236
13.94	Synthèse d'un filtre RII	236
13.95	Calcul de filtre réjecteur électronique	237
14	Travaux pratiques	239
14.1	Prérequis et objectifs	239
14.2	Introduction à Matlab	239
14.2.1	Principales caractéristiques	239
14.2.2	Environnement de travail	240
14.2.2.1	Session Matlab	240
14.2.2.2	Contrôle de session	240
14.2.3	Langage de programmation	241
14.2.3.1	Principe de la syntaxe	241
14.2.3.2	Exemples d'instructions	242
14.2.3.3	Opérateurs et constantes	242
14.2.3.4	Contrôle de flux de données	242
14.2.3.5	Création d'une fonction externe	243
14.2.4	Bibliothèque de fonctions	243

14.2.4.1	Fonctions graphiques	243
14.2.4.2	Interaction utilisateur	244
14.2.4.3	Interaction fichiers externes	244
14.2.4.4	Manipulation de matrices	245
14.2.4.5	Fonctions mathématiques	245
14.2.4.6	Signaux de base	245
14.3	Séance d'initiation	245
14.3.1	Manipulation de matrices	245
14.3.2	Manipulation de polynômes	246
14.3.3	Représentation graphique d'un signal temporel	246
14.3.4	Visualisation 3D et affichage d'image	247
14.4	Calcul et affichage du DSF d'une fonction	247
14.5	Equations différentielles	247
14.5.1	Toolbox Symbolic Math	247
14.5.2	ED Linéaire du 1 ^{er} ordre	249
14.5.3	ED Linéaire du 2 ^e ordre	249
14.5.4	Circuit RLC parallèle	249
14.6	Transformée de Laplace	250
14.6.1	Définition	250
14.6.2	Calculs de quelques TL usuelles	250
14.6.3	Résolution d'équation différentielle linéaire	250
14.7	Fonction de transfert	251
14.7.1	Rappels	251
14.7.2	Amplificateur à résistance compensée	251
14.8	Transformée de Fourier	252
14.8.1	Rappels	252
14.8.2	TF Continue : fonctions usuelles	252
14.8.3	TF Discrète : analyse spectrale	253
14.8.3.1	Etude du théorème de Shannon	253
14.8.3.2	Influence de la troncature temporelle	253
14.8.3.3	Etude de l'écrtage	253
14.8.4	Annexes	254
14.8.4.1	Signaux tests	254
14.8.4.2	Fonctions internes	254
14.8.4.3	Fonctions externes	255
14.9	Transformée en Z	255
14.9.1	Rappel sommaire	255
14.9.2	Fonctions usuelles	256
14.9.3	Filtre numérique RII	256
14.9.4	Annexe théorique	257
14.10	Filtrage de signaux	257

14.10.1 Filtrage par moyennage	258
14.10.2 Filtrage par troncature du spectre	258
14.10.3 Simulations	259
14.11 Consignes de rédaction des comptes-rendus	259
14.11.1 Choix de sujets	259
14.11.2 Délivrables	260
14.11.3 Critères d'évaluation	260
15 Solution des exercices	261
15.1 Corrigé du 13.1 Trigonométrie	261
15.2 Corrigé du 13.2 Complexes	261
15.3 Corrigé du 13.3 Dérivation	262
15.4 Corrigé du 13.4 Intégration	263
15.5 Corrigé du 13.5 EDL	264
15.6 Corrigé du 13.6 Fraction rationnelle	264
15.7 Corrigé du 13.7 Intégrales	265
15.8 Corrigé du 13.8 Riemann	266
15.9 Corrigé du 13.9 Suites	267
15.10 Corrigé du 13.10 Suite géométrique	268
15.11 Corrigé du 13.11 Suite arithmétique	268
15.12 Corrigé du 13.12 Grecs	269
15.13 Corrigé du 13.13 Suite homographique	270
15.14 Corrigé du 13.14 Fibonacci	271
15.15 Corrigé du 13.15 Convergence	272
15.16 Corrigé du 13.16 Suite récurrente	273
15.17 Corrigé du 13.17 Assassin	273
15.18 Corrigé du 13.18 Convergence séries	274
15.19 Corrigé du 13.19 Série alternée	276
15.20 Corrigé du 13.20 Série comparée	276
15.21 Corrigé du 13.21 Sommes	277
15.22 Corrigé du 13.22 Reste	277
15.23 Corrigé du 13.23 Rayon	278
15.24 Corrigé du 13.24 Cauchy-Alembert	279
15.25 Corrigé du 13.25 Convergence de séries	280
15.26 Corrigé du 13.26 Carré	280
15.27 Corrigé du 13.27 Rectangle	280
15.28 Corrigé du 13.28 Triangle pair	282
15.29 Corrigé du 13.29 Double alternance	282
15.30 Corrigé du 13.30 DDS	283
15.31 Corrigé du 13.31 Triangle	283
15.32 Corrigé du 13.32 Onduleur	284

15.33	Corrigé du 13.33	Créneaux	285
15.34	Corrigé du 13.34	Wallis	287
15.35	Corrigé du 13.35	Circuit RL série	289
15.36	Corrigé du 13.36	EDL du 2 nd ordre	289
15.37	Corrigé du 13.37	Circuit RLC parallèle	289
15.38	Corrigé du 13.38	Régime apériodique	290
15.39	Corrigé du 13.39	Propagation de virus	290
15.40	Corrigé du 13.40	Calcul de TL	291
15.41	Corrigé du 13.41	EDL du 2 nd ordre	291
15.42	Corrigé du 13.42	Calcul d'un original	291
15.43	Corrigé du 13.43	Circuit RC par TL	292
15.44	Corrigé du 13.44	RLC par TL	292
15.45	Corrigé du 13.45	Impédance	293
15.46	Corrigé du 13.46	Circuit	294
15.47	Corrigé du 13.47	Peigne	295
15.48	Corrigé du 13.48	TL EDLCC	296
15.49	Corrigé du 13.49	Bode	296
15.50	Corrigé du 13.50	Ampli	297
15.51	Corrigé du 13.51	Avance	298
15.52	Corrigé du 13.52	Piston	298
15.53	Corrigé du 13.53	Porte	300
15.54	Corrigé du 13.54	Modulation	301
15.55	Corrigé du 13.55	Chaleur	302
15.56	Corrigé du 13.56	Filtre numérique	304
15.57	Corrigé du 13.57	TZ	305
15.58	Corrigé du 13.58	Echantillonnage	307
15.59	Corrigé du 13.59	TZ	307
15.60	Corrigé du 13.60	Transformée de Laplace	308
15.61	Corrigé du 13.61	Transformée de Fourier	309
15.62	Corrigé du 13.62	Transformée en Z	310
15.63	Corrigé du 13.63	TL Filtre 2 ^e ordre	310
15.64	Corrigé du 13.64	TZ	311
15.65	Corrigé du 13.65	TL	312
15.66	Corrigé du 13.66	Original	312
15.67	Corrigé du 13.67	Périodique	313
15.68	Corrigé du 13.68	TF Passe-bas	314
15.69	Corrigé du 13.69	SE	314
15.70	Corrigé du 13.70	DSF	314
15.71	Corrigé du 13.71	EDLCC14	315
15.72	Corrigé du 13.72	TF Triangle	315
15.73	Corrigé du 13.73	Alternance positive	316

15.74	Corrigé du 13.74 Reconstitution par TFD	316
15.75	Corrigé du 13.75 RL	317
15.76	Corrigé du 13.76 Alternance négative	318
15.77	Corrigé du 13.77 TL RL série	319
15.78	Corrigé du 13.78 Expo décroissante	320
15.79	Corrigé du 13.79 Pompe	320
15.80	Corrigé du 13.80 Lavinas	323
15.81	Corrigé du 13.81 Amorti	324
15.82	Corrigé du 13.82 Alternance négative	325
15.83	Corrigé du 13.83 TL système 1 ^{er} O	326
15.84	Corrigé du 13.84 TL EDLCC	326
15.85	Corrigé du 13.85 Dents de Scie	326
15.86	Corrigé du 13.86 Triangle	327
15.87	Corrigé du 13.87 Analyse spectrale par DSF	327
15.88	Corrigé du 13.88 TL de fonction périodique	328
15.89	Corrigé du 13.89 Circuit RC	328
15.90	Corrigé du 13.90 Transformée du triangle	329
15.91	Corrigé du 13.91 Vibration	329
15.92	Corrigé du 13.92 Radar	330
15.93	Corrigé du 13.93 Corrélateur	332
15.94	Corrigé du 13.94 Filtre récursif	336
15.95	Corrigé du 13.95 Filtre réjecteur	339
16	Solution des TD et TP	341
16.1	Programme simulateur des exercices	341
16.2	Critères et livrables attendus en TP	345
16.3	Corrigé TP 14.3 Initiation	345
16.4	Corrigé TP 14.4 DSF	346
16.4.1	Programme DSF09.m	346
16.4.2	Résultats	349
16.5	Solution TP 14.5 Equations différentielles	349
16.5.1	Programme Matlab	349
16.5.2	Résultats graphiques	351
16.6	Corrigé TP 14.6 TL	351
16.6.1	Programme Matlab	351
16.6.2	Solution de l'exercice de TP 14.6.3	353
16.7	Corrigé TP 14.7 FdT	353
16.7.1	Programme amplity.m	353
16.7.2	Résultats graphiques	354
16.8	Corrigé TP 14.8 TF	354
16.9	Corrigé TP 14.9 TZ	356

TABLE DES MATIÈRES	25
16.10Corrigé TP 14.10 Filtrage	357
16.11Fonctions appelées	359
Conclusion	363
Bibliographie	365
Glossaire	369
Index	371

Chapitre 1

Suite numérique

Préambule

Les suites numériques sont des objets mathématiques qui revêtent une importance grandissante avec l'avènement technologique de l'informatique et des ordinateurs, dont l'usage généralisé conduit à la numérisation des informations et des signaux de notre vie quotidienne, qui deviennent alors des séquences de nombres, après échantillonnage et quantification.

On aborde dans ce chapitre les notions de base dont les mots-clés sont les suivants : terme général d'une suite, limite, convergence, divergence, suite majorée, minorée, suite récurrente, suite arithmétique, suite géométrique, raison d'une suite, somme partielle d'une suite [34, 29, 36].

1.1 Définition

On appelle suite à valeurs dans un ensemble E , la donnée d'une partie finie I de \mathbb{N} et d'une application f :

$$\begin{aligned} f &: I \longrightarrow E \\ n &\longrightarrow u_n \end{aligned} \tag{1.1}$$

u_n est appelé le terme général de la suite. Souvent on a : $E = \mathbb{R}$ et $I = \mathbb{N}$.

Notation : la suite est notée $(u_n)_{n \in I}$.

Définitions :

- suite croissante : $\forall n \in I, u_{n+1} > u_n$
- suite décroissante : $\forall n \in I, u_{n+1} < u_n$
- suite majorée : $\exists M \in E \mid \forall n \in I, u_n < M$, (M est appelé le majorant)
- suite minorée : $\exists m \in E \mid \forall n \in I, u_n > m$, (m est alors le minorant).

1.2 Limite

On dit que la suite $(u_n)_{n \in I}$ admet pour limite ℓ ($\ell \in \mathbb{R}$) si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \in I, (n \geq n_0) \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

Propriété : il y a unicité de la limite (la preuve résulte du fait que \mathbb{R} est séparé).

Définition de la convergence : si la suite $(u_n)_{n \in I}$ admet pour limite ℓ , avec $\ell \in \mathbb{R}$, on dit que la suite $(u_n)_{n \in I}$ converge vers ℓ . On note :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \ell$$

Dans tous les autres cas, on dit que la suite $(u_n)_{n \in I}$ diverge. §13.15

1.3 Critères de convergence

1.3.1 Théorème

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante et majorée (resp. décroissante et minorée) ; alors la suite u_n converge. §13.16

1.3.2 Suites adjacentes

On dit que deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes si :

$$\begin{cases} (u_n) \text{ croît} \\ (v_n) \text{ décroît} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (v_n - u_n) = 0 \end{cases}$$

Théorème : deux suites adjacentes convergent et ont même limite.

1.3.3 Critère de Cauchy

On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfait au critère de Cauchy [30] si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que : } \forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, (n \geq n_0, p \geq n_0) \Rightarrow |u_n - u_p| \leq \varepsilon$$

Théorème : on a l'équivalence (la preuve résulte du fait que \mathbb{R} est complet) :
la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy \iff la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans \mathbb{R} .

1.4 Exemple fondamental

Soit $\alpha > 0$. On pose $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$.

Alors :

$$\begin{aligned} \text{si : } & \alpha > 1, & (u_n) \text{ converge} \\ \text{si : } & 0 < \alpha \leq 1, & (u_n) \text{ diverge} \end{aligned}$$

Preuve : elle s'établit en quatre étapes §13.8.

1. u_n croît car : $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^\alpha} > 0$
2. cas $\alpha > 1$: on majore la somme par une intégrale convergente,
3. cas $0 < \alpha \leq 1$: on minore la somme par une intégrale divergente,
4. cas $\alpha = 1$: d'après 3, $u_n \geq \log(n+1)$ donc u_n ne peut être borné.

§13.9

1.5 Suite récurrente

1.5.1 Définition

Une suite récurrente est définie par la donnée d'une valeur initiale a et d'une équation itérative :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Théorème : si f est continue et si (u_n) converge vers ℓ , alors $f(\ell) = \ell$.

— récurrence affine :

$$\begin{cases} u_0 \text{ donné} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = r.u_n + a \end{cases}$$

— récurrence homographique : $u_{n+1} = \frac{au_n+b}{cu_n+d}$ avec $c \neq 0$ §13.13

— récurrence linéaire à deux termes : $u_{n+1} = au_n + bu_{n-1}$ §13.14

1.5.2 Suite arithmétique

C'est un cas particulier de suite récurrente où l'on ajoute, à chaque itération, une quantité identique r , appelée la raison de la suite [3] :

$$\begin{cases} u_0 = a \text{ donné} \\ u_n = u_{n-1} + r \end{cases} \iff u_n = n.r + a$$

Formule fondamentale : la somme partielle d'une suite arithmétique vaut

$$\sum_{n=0}^N u_n = (N+1) \left(a + \frac{Nr}{2} \right)$$

1.5.3 Suite géométrique

C'est un cas particulier de suite récurrente où l'on multiplie, à chaque itération, par une quantité identique r , appelée là aussi la raison :

$$\begin{cases} u_0 = a \text{ donné} \\ u_n = r.u_{n-1} \end{cases} \iff u_n = r^n.a$$

Formule fondamentale¹ : la somme partielle d'une suite géométrique vaut

$$\sum_{n=0}^N u_n = a \frac{1-r^{N+1}}{1-r}$$

§13.10

§13.11

1.6 Raisonnement par récurrence

La technique de démonstration par récurrence d'une formule mathématique portant sur un indice entier n est fréquemment utilisée, notamment pour les propriétés des suites numériques. Le raisonnement par récurrence consiste en 3 étapes pour démontrer la vérité d'une propriété P , qui est fonction de l'indice n :

1. On montre que la propriété P est vraie pour un indice initial n_0 (typ. $n_0 = 0$ ou $n_0 = 1$) : P_{n_0} vraie.
2. Supposant la propriété P vraie au rang n , on démontre que cela implique qu'elle est aussi vraie au rang $n + 1$: $P_n \Rightarrow P_{n+1}$
3. On en conclut alors qu'elle est vraie $\forall n > n_0$.

§13.17

1. Mon prof de math sup, M. Grivaux, affirmait que cette formule mathématique est la découverte scientifique la plus importante depuis l'invention de la roue, et je ne suis pas loin de partager son avis.

Chapitre 2

Série numérique

Préambule

Une série numérique est une suite de sommes partielles ; c'est donc l'équivalent, en numérique, de la notion d'intégrale d'une fonction en analogique. En effet, une intégrale s'approxime numériquement comme la somme de petits rectangles élémentaires (cf. définition de l'intégrale de Riemann comme limite sur de petits intervalles de l'aire sous la courbe d'une fonction). Les séries de Fourier seront le point d'orgue de ce concept, trouvant application principalement pour l'analyse harmonique d'un signal électrique ou mécanique (distorison du courant électrique, analyse vibratoire de machine tournante etc.)

Les mots-clés de ce chapitre sont : série de Riemann, somme d'une série, convergence, divergence, série alternée, série à termes positifs, série harmonique, série géométrique, convergence absolue, somme partielle, série entière, rayon de convergence, Cauchy, critère de d'Alembert, règle d'Abel. [21]

2.1 Définition - Propriétés de convergence

Soit une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On lui associe la suite des sommes partielles :

$S_n = \sum_{k=0}^n u_k$. La suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est appelée série $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S$, alors on dit que la série (u_n) converge. §13.21

2.1.1 Série géométrique

Soit $a \in \mathbb{C}^*$, $r \in \mathbb{C}$. La série $(ar^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge $\iff |r| < 1$ et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}$$

r est la raison géométrique. §13.12

2.1.2 Condition nécessaire de convergence

Une condition nécessaire (CN) est que :

la série $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge $\Rightarrow \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0}$.

N.B. : Ce n'est pas une condition suffisante.

— Preuve : $u_n = S_n - S_{n-1}$.

— Exemple :

$$S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{k}{4k-3}$$

$$|S_n - S_{n-1}| = |u_n| = \frac{n}{4n-3} \xrightarrow{\infty} \frac{1}{4} \Rightarrow \text{la série diverge.}$$

— Contre-exemple : série harmonique $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$.

On a : $S_n - S_{n-1} = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, mais on ne peut pas conclure que la série converge.

2.1.3 Condition de Cauchy

On a l'équivalence : la série $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ CV \Leftrightarrow la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ CV $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall q > p > n_0, ||S_q - S_p|| < \varepsilon$

or $S_q - S_p = u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_q$

d'où la condition de Cauchy sur les séries : série $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge \Leftrightarrow

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid q > p > n_0 \Rightarrow |u_{p+1} + \dots + u_q| < \varepsilon}$$

(Preuve : EVN complet).

Contre-exemple : série harmonique

$$\text{On a : } S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

2.1.4 Série absolument convergente

On a l'implication : la série $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ converge \Rightarrow la série $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

$$\left| \sum_0^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_0^{+\infty} |u_n|$$

Si $\sum (u_n)$ converge alors que $\sum |u_n|$ diverge, on parle de **semi-convergence**.

C'est le cas de la série harmonique alternée.

2.2 Série à termes positifs $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$

2.2.1 CNS de convergence

Considérons la somme partielle $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$. La suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. Pour qu'elle converge, il faut et il suffit qu'elle soit majorée, c'est-à-dire que :

$$\exists A \in \mathbb{R}_+ \mid \forall n \in \mathbb{N}, S_n \leq A.$$

D'où la **CNS** : série $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge \iff suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ majorée

2.2.2 Comparaison entre séries

Soient 2 séries (u_n) et (v_n) .

- si $\lim_{+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \ell \neq 0$, alors (u_n) et (v_n) sont de même nature.
- si $\lim_{+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$ et si la série $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
- si $\exists n_0 \mid \forall n \geq n_0, 0 \leq u_n \leq v_n$ alors :
 - série (v_n) converge \Rightarrow série (u_n) **CV**.
 - série (u_n) diverge \Rightarrow série (v_n) **DIV**

2.2.2.1 Exemples

$$1) u_n = \frac{e^{-n}}{n} < v_n = e^{-n}$$

$$2) u_n = \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{1}{2^n} < v_n = \frac{1}{2^n}$$

2.2.2.2 Critère de convergence

Hypothèse :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n > n_0, u_n > 0 \text{ et } v_n > 0 \text{ et } \exists n_1 \geq n_0 \mid \forall n > n_1, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

Conclusion :

série $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ CV \Rightarrow série (u_n) CV

série $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ DIV \Rightarrow série (v_n) DIV

2.2.3 Comparaison de nature de série et d'intégrale généralisée

Hypothèses :

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\longrightarrow f(x) > 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

- f décroissante sur $[a, +\infty[$, $a > 0$
- f localement intégrable sur \mathbb{R}^+
- $\lim_{+\infty} f = 0$
- On définit : $u_n = f(n) \geq 0$.

Alors : la série $\sum (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ sont de même nature.

§13.20

Preuve

On a l'encadrement :

$$u_1 + \dots + u_{n+1} \leq \int_0^{n+1} f(x) dx \leq u_0 + \dots + u_n$$

2.2.4 Critère de Riemann : règle $n^\alpha u_n$

La série de Riemann est définie par : $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha > 0$. Et on a :

$$\text{série } \left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ CV} \Leftrightarrow \alpha > 1 \quad \text{§13.12}$$

D'où l'énoncé de la règle : soit une série $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On forme $v_n = n^\alpha u_n$. On cherche un α tel que : $\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha u_n = \ell$, $\ell \geq 0$.

$$\text{Alors : } u_n \sim \frac{\ell}{n^\alpha} \text{ donc } \begin{cases} \text{si } \alpha > 1, (u_n) \text{ CV} \\ \text{si } \alpha \leq 1, (u_n) \text{ DIV} \end{cases}$$

Exemple

$$u_n = \left(\tan \frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n} \right)^\alpha, \alpha > 0$$

On montre qu'elle ne converge que si $\alpha > 1/3$.

2.2.5 Comparaison entre série positive et série géométrique

2.2.5.1 Théorème

Soit $u_n \geq 0$; $\exists r, 0 < r < 1 \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq r^n$

Série $(r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ CV \Rightarrow série $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ CV

2.2.5.2 Critère de Cauchy

On forme $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell$

- Si $\ell < 1$, la série $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ CV §13.24
- Si $\ell > 1$, la série $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ DIV
- Si $\ell = 1$, le cas est douteux.

Preuve : $\ell - \varepsilon < \sqrt[n]{u_n} < \ell + \varepsilon < 1 \implies u_n < (\ell + \varepsilon)^n$

2.2.5.3 Critère de d'Alembert

On forme :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \ell$$

- Si $\ell < 1$, la série $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ CV
- Si $\ell > 1$, la série $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ DIV
- Si $\ell = 1$, c'est un cas douteux.

§13.18

2.2.5.4 Exemples

- 1) $u_n = \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^{n^2}$ 2) $u_n = \frac{n!}{n^n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$

2.3 Série alternée**2.3.1 Définition**

Une série $(u_n)_{n \in I}$ est dite alternée si elle présente une alternance de signe d'un terme au suivant :

$$\begin{cases} u_{2n} \geq 0 \\ u_{2n+1} \leq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} v_n \geq 0 \\ u_n = (-1)^n v_n \end{cases} \quad v_n = |u_n|$$

2.3.2 Théorème

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ et si la suite $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante

, alors la série $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. §13.19

2.3.2.1 Preuve

On calcule le reste de la série $R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$, où S_n est la somme partielle et $S = \lim_{+\infty} S_n$ est la limite.

On a toujours : $\boxed{|R_n| \leq |u_{n+1}|}$ $\lim_{+\infty} R_n = 0$

2.3.2.2 Exemple : série harmonique alternée

$$S = \sum_1^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

2.3.3 Règle d'Abel

Soit une série $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $u_n = \varepsilon_n v_n$ avec :

$$\begin{cases} \varepsilon_n \in \mathbb{R}_+^* \\ \lim_{+\infty} \varepsilon_n = 0 \\ \text{suite } (\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ décroît} \end{cases}$$

On suppose que : $\exists M > 0 \mid \forall n \in \mathbb{N}, |v_0 + v_1 + \dots + v_n| \leq M$

Alors : la série $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

N.B. : ce théorème contient le précédent : $u_n = (-1)^n |u_n| = v_n \varepsilon_n$

2.4 Résumé

Méthodes d'étude des sommes S_n : §13.22

1. Comparaison à une autre série,
2. Comparaison à une intégrale définie,
3. Critères de Cauchy et de d'Alembert ; Règle $n^\alpha u_n$,
4. Réduction de S_n si le terme général s'écrit : $u_n = \varphi(n) - \varphi(n-1) \Rightarrow S_n = \varphi(n) - \varphi(0)$
5. Emploi de la formule de Mac-Laurin ou de Taylor ([Développement en Série Entière \(DSE\)](#)).

Exemple

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \text{ avec } \alpha > 0$$

2.5 Série entière

2.5.1 Définition

C'est une série de terme général :

$u_n = u_n(x) = a_n x^n$. On pose $f(x) = \sum_0^{+\infty} a_n x^n$.

2.5.2 Rayon de convergence

2.5.2.1 Lemme d'Abel

On suppose que : $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ tel que la suite $(a_n x_0^n)$ est bornée.

Alors $\forall |x| < |x_0|$, la série $(a_n x^n)$ est absolument convergente.

Preuve :

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \cdot \left| \left(\frac{x}{x_0} \right)^n \right| \leq M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$$

or une série géométrique de raison $r = \left| \frac{x}{x_0} \right| < 1$ converge, **CQFD**.

2.5.2.2 Définition du rayon de convergence

Notons R le rayon de convergence d'une série entière. Alors :

si $|x| < R$, la série $(a_n x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est absolument convergente.

si $|x| > R$, la série $(a_n x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est divergente.

2.5.3 Détermination du rayon de convergence

On applique les critères de convergence de Cauchy ou d'Alembert à la série $u_n = a_n x^n$. **§13.23**

2.5.3.1 Critère de Cauchy

Si l'on pose : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell$; alors le critère de Cauchy donne :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x| = \ell \cdot |x| \Rightarrow \begin{cases} \text{si } < 1 \rightarrow CV \\ \text{si } > 1 \rightarrow DIV \end{cases}$$

2.5.3.2 Règle de Cauchy

Si $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, alors $R = \frac{1}{\ell}$.

Preuve : En effet : $\lim \sqrt[n]{u_n} = \ell \cdot |x| < 1 \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{\ell} \rightarrow CV$

2.5.3.3 Critère de d'Alembert

De même, si l'on pose : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \ell$, alors le critère de d'Alembert donne :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} |x| \cdot \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \ell \cdot |x| \Rightarrow \begin{cases} \text{si } < 1 \rightarrow CV \\ \text{si } > 1 \rightarrow DIV \end{cases}$$

2.5.3.4 Règle de d'Alembert

Si $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left \frac{a_{n+1}}{a_n} \right $, alors $R = \frac{1}{\ell}$.

N.B. : Un [DSE](#) est valable à l'intérieur du cercle de convergence.

§13.69

Chapitre 3

Développement en série de Fourier

Préambule

Les séries de Fourier sont un outil mathématique très utilisé dans les sciences de l'ingénieur, que ce soit en mécanique ou en électricité [11]. Le Développement en Série de Fourier (DSF) d'un signal permet en effet de connaître sa fréquence fondamentale et ses harmoniques (qui sont les multiples de sa fréquence fondamentale).

En mécanique, l'analyse vibratoire repose sur la détermination des fréquences auxquelles un système est sensible : le DSF permet de déterminer les harmoniques présents dus à des forces d'excitation, et de se prémunir des vibrations gênantes au regard de la fréquence propre du système (notamment dans les machines tournantes, mais aussi dans les ouvrages du génie civil par rapport à la résistance des structures). §13.91

En électricité, l'analyse des harmoniques présents dans le courant électrique repose aussi sur le DSF. On peut ainsi mesurer la distorsion harmonique et éliminer les harmoniques indésirables (généralement, ce sont les harmoniques impairs de rang 3 et 5 qui sont les plus gênants, car d'amplitude non négligeable). Ces harmoniques (souvent dus à des composants non-linéaires, des équipements informatiques ou des lampes) créent des perturbations dans les réseaux électriques : effet Joule, diminution du facteur de puissance, vieillissement, endommagement. On parle alors de pollution harmonique. §13.32

Les mots-clés de ce chapitre sont : série trigonométrique, fonction périodique, fondamental, harmonique, valeur moyenne, valeur efficace, composante continue, fréquence, pulsation, déphasage, discontinuité [2, 39, 28].

3.1 Série trigonométrique

C'est une série de terme général : $u_k(x) = a_k \cos kx + b_k \sin kx$, où :

- x est une variable réelle indépendante,
- $k \in \mathbb{N}$,
- a_k et b_k sont des termes de deux séries numériques.

Si la série converge pour $x \in$ à un intervalle d'amplitude 2π , la somme $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)$ est une fonction continue de période 2π :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx \quad (3.1)$$

3.2 Théorème de Fourier

Soit $f(x)$ périodique de période 2π dans l'intervalle $[\theta, \theta + 2\pi]$ (ou plus simplement dans l'intervalle $[-\pi, +\pi]$). On suppose que l'on peut développer $f(x)$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx.$$

Si la série ainsi définie converge, on montre que l'on a :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\theta}^{\theta+2\pi} f(x) dx \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{\theta}^{\theta+2\pi} f(x) \cos kx dx \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{\theta}^{\theta+2\pi} f(x) \sin kx dx \end{aligned} \quad (3.2)$$

Interprétation : a_0 est la valeur moyenne de $f(x)$ sur l'intervalle.

3.3 Condition de validité

Le développement ainsi obtenu, appelé [DSF](#), est valable dans l'intervalle $[-\pi, +\pi]$ pour toute fonction vérifiant les conditions de Dirichlet (en abrégé [CD](#)) :

- $f(x)$ doit être **uniformément bornée** dans $[-\pi, +\pi]$

- $f(x)$ n'a qu'un **nombre fini de discontinuités de 1^{re} espèce** (limite à droite et à gauche finies, mais différentes) :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(a - \varepsilon) = \ell^- \neq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(a + \varepsilon) = \ell^+$$

- $f(x)$ n'a qu'un **nombre fini d'extrema stricts**.

Plus généralement, on peut parler du DSF des fonctions continues par morceaux dans un intervalle fini.

3.4 Point de discontinuité (phénomène de Gibbs)

En un point de discontinuité de première espèce $x = a$, la somme $f(x)$ d'une série de Fourier prend la valeur :

$$f(a) = \frac{1}{2} [f(a - 0) + f(a + 0)] \quad (3.3)$$

De même, si les valeurs limites aux bornes de l'intervalle $[-\pi, +\pi]$ sont différentes, on pose : §13.33

$$f(\pm\pi) = \frac{1}{2} [f(\pi - 0) + f(-\pi + 0)]$$

3.5 Fonction définie dans un intervalle quelconque

Soit une fonction $f(t)$ [13, 14, 22] :

- définie dans un intervalle $[\theta, \theta + T]$, périodique de période T ,
- satisfaisant les CD dans cet intervalle.

On pose : $\frac{t}{T} = \frac{x}{2\pi}$ et $g(x) = f(t) = f\left(\frac{Tx}{2\pi}\right)$

alors : $g(x)$ est périodique de période 2π .

En effet :

$$g(x + 2k\pi) = f\left(\frac{T(x + 2k\pi)}{2\pi}\right) = f\left(\frac{Tx}{2\pi} + kT\right) = f(t + kT) = f(t) = g(x)$$

On peut écrire : $g(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$

avec, d'après les équations (3.2) : $a_0 = \frac{1}{T} \int_{\theta}^{\theta+T} f(t) dt$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{\theta}^{\theta+T} f(t) \cos \frac{2\pi kt}{T} dt$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{\theta}^{\theta+T} f(t) \sin \frac{2\pi kt}{T} dt$$

donc : $f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{2\pi kt}{T} + b_k \sin \frac{2\pi kt}{T}$. §13.30

On peut poser : $\begin{cases} a_k = A_k \cos \varphi_k \\ b_k = A_k \sin \varphi_k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \\ \varphi_k = \operatorname{Arctg} \frac{b_k}{a_k} \end{cases}$

$$\Rightarrow g(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(kx - \varphi_k)$$

$$\Rightarrow f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{T} - \varphi_k\right)$$

3.6 Terminologie

- a_0 représente la **composante continue** (correspondant à la valeur moyenne),
- A_1 représente l'amplitude du **fondamental**,
- A_k représente l'amplitude de l'**harmonique** de rang k , §13.29
- φ_k représente le **déphasage** (qui s'exprime en radians ou en degrés),
- $\nu = 1/T$ représente la **fréquence** fondamentale (exprimée en Hz),
- $\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T$ représente la **pulsation** de base (qui s'exprime en radians/seconde).

§13.76 §13.82 §13.87

3.7 Propriétés de symétrie

3.7.1 Fonction paire

Toute fonction $f(x)$ **paire** de période 2π admet pour DSF une série de cosinus :

$$f(-x) = f(x) \Rightarrow \begin{cases} \forall k, b_k = 0 \\ a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx \quad ; \quad a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx dx \end{cases}$$

Généralisation à une fonction $f(t)$ paire de période T : §13.26

$$\forall k, b_k = 0 \quad ; \quad a_0 = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(t) dt \quad ; \quad a_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos \frac{2\pi kt}{T} dt$$

3.7.2 Fonction impaire

Toute fonction $f(x)$ **impair** de période 2π admet pour DSF une série de sinus :

$$f(-x) = -f(x) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \forall k, a_k = 0 \\ b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin kx \, dx \end{cases}$$

Généralisation à une fonction $f(t)$ impaire de période T :

$$\forall k, a_k = 0, \quad b_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin \frac{2\pi kt}{T} \, dt$$

§13.31 §13.70 §13.85

3.8 Formule de Bessel-Parseval

Soit une fonction $f(t)$:

- de période T ,
- satisfaisant les [CD](#).

On montre que (principe de conservation d'énergie) : §13.33

$$\frac{1}{T} \int_\theta^{\theta+T} [f(t)]^2 \, dt = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{(a_k^2 + b_k^2)}_{A_k^2}$$

Dans le cas d'une fonction périodique de période 2π définie sur $[-\pi; +\pi]$:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} [g(x)]^2 \, dx = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{(a_k^2 + b_k^2)}_{A_k^2} \quad (3.4)$$

3.9 Définition de la valeur efficace

$$V_{eff} = \left[\frac{1}{T} \int_\theta^{\theta+T} [f(t)]^2 \, dt \right]^{1/2} \quad \text{C'est-à-dire :} \quad V_{eff}^2 = \underbrace{\langle [f(t)]^2 \rangle}_{\uparrow \text{ valeur moyenne}}$$

3.10 Intégration et dérivation

Soit une fonction $f(x)$:

- de période 2π ,
- définie sur $[-\pi; +\pi]$,
- développable en [SF](#) : $f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$.

3.10.1 Intégration

$$\begin{cases} F(x) = \int_0^x f(u) du = a_0 x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k} \sin kx + \frac{b_k(1-\cos kx)}{k} \\ F(0) = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ C.U. \end{matrix} \Rightarrow \text{intégration terme à terme.}$$

— Si $a_0 = 0$: Alors : $F(x)$ représente une fonction DSF dans $[-\pi; +\pi]$

$$F(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos kx + B_k \sin kx$$

avec :

$$A_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k} \quad A_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos kx dx = -\frac{b_k}{k} \quad B_k = \frac{a_k}{k}$$

— Si $a_0 \neq 0$: On développe $a_0 x$ en SF dans l'intervalle $[-\pi; +\pi]$ et on peut alors représenter $F(x)$ par une S.F. dans $[-\pi; +\pi]$.

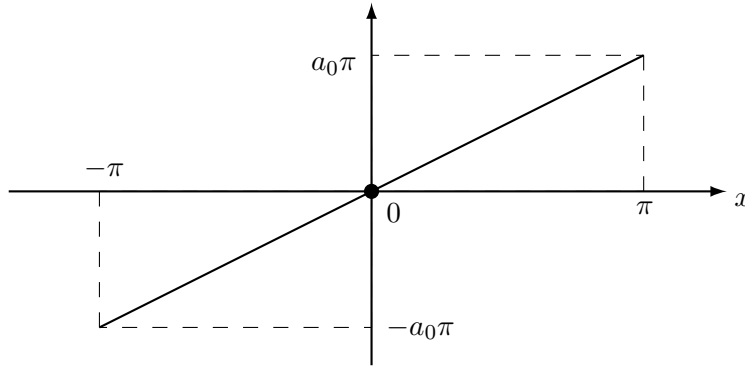


FIGURE 3.1 – Fonction $a_0 x$ représentée sur $[-\pi; +\pi]$.

$a_0 x = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx$ avec $\alpha_0 = \alpha_k = 0$ car la fonction est impaire.

Et : $\beta_k = 2 a_0 (-1)^{n+1} \Rightarrow$

$$A_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k} \quad ; \quad A_k = -\frac{b_k}{k} \quad ; \quad B_k = \beta_k + \frac{a_k}{k}$$

3.10.2 Dérivation

Soit $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$. On suppose que $f'(x)$ admet un DSF, c'est-à-dire qu'on aura :

$$f'(x) = a'_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a'_k \cos kx + b'_k \sin kx$$

Soient x_i les divers **points de discontinuités** de $f(x)$ supposés en **nombre fini** p .

$$\text{On pose : } \begin{cases} \delta_i = f(x_i + 0) - f(x_i - 0) \\ \delta_0 = f(\pi - 0) - f(-\pi + 0) \end{cases} \quad 1 \leq i \leq p$$

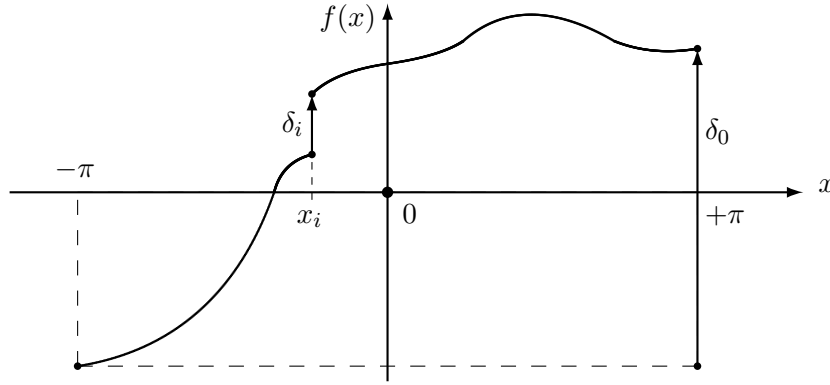


FIGURE 3.2 – Fonction $f(x)$ avec discontinuité de première espèce.

$$a'_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) dx = \frac{1}{2\pi} [f(x)]_{-\pi}^{+\pi} = \frac{1}{2\pi} \left[\delta_0 - \sum_{i=1}^p \delta_i \right] = a'_0$$

$$a'_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos kx dx = \frac{1}{\pi} [f(x) \cos kx]_{-\pi}^{+\pi} + \underbrace{\frac{k}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin kx dx}_{\text{intég. parties}}$$

$$= \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^p \cos kx_i [f(x_i - 0) - f(x_{i-1} + 0)] + k b_k$$

$$a'_k = \frac{1}{\pi} \left[(-1)^k \delta_0 - \sum_{i=1}^p \delta_i \cos kx_i \right] + k b_k$$

De même, on trouve :

$$b'_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin kx dx \quad \begin{array}{c} = \\ \uparrow \\ \text{intég. par parties} \\ \text{sur chaque intervalle} \\ \text{où } f \text{ est continue.} \end{array} \quad -\frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^p \delta_i \sin kx_i - ka_k = b'_k$$

Remarque : Si $f(x)$ est continue sur $[-\pi; +\pi]$, on a : $\delta_0 = \delta_i = 0$ et $f'(x)$ s'obtient en dérivant terme à terme le DSF de $f(x)$. §13.33

3.11 DSF exponentiel

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \exp\left(\frac{j2\pi kt}{T}\right) \text{ avec } c_k = F(k) = \frac{1}{T} \int_{\theta}^{\theta+T} f(t) \exp\left(-\frac{j2\pi kt}{T}\right) dt$$

N.B. : Cette expression est très utile en traitement du signal, car elle rejoint les concepts de transformée de Fourier discrète ou de transformée en cosinus discrète.

Pour un signal réel, on a $c_k^* = c_k$ d'où :

$$a_0 = c_0 \tag{3.5}$$

$$a_k = 2\Re[c_k] \tag{3.6}$$

$$b_k = -2\Im[c_k] \tag{3.7}$$

Chapitre 4

Equation différentielle

Préambule

La plupart des systèmes physiques peuvent s'approximer par des modèles mathématiques de fonctionnement pseudo-linéaire régis par des équations différentielles. C'est notamment le cas en mécanique ou en électricité : il suffit de mentionner les lois électriques qui relient courant et tension dans un condensateur ou une self-inductance, ou les lois du mouvement qui lient position, vitesse et accélération dans un oscillateur vibrant comportant une masse, un ressort et un amortisseur. Ceci justifie l'importance applicatif des équations différentielles, et particulièrement dans le cas de systèmes linéaires ou linéarisés qui sont régis par des EDL.

On verra, au chapitre suivant, que la transformée de Laplace est un outil pratique pour résoudre ces problèmes différentiels en les algébrisant.

4.1 Généralités

4.1.1 Définition

Une équation différentielle ([ED](#)) d'ordre n est une relation du type :

$$\phi \left[x, y, y', y'' \dots y^{(n)} \right] = 0 \quad (4.1)$$

où :

- x est une variable
- $y(x)$ est une fonction
- ϕ est une application.

4.1.2 Théorème

L'intégrale générale d'une équation différentielle d'ordre n dépend de n constantes arbitraires.

4.2 Equation différentielle du 1^{er} ordre

4.2.1 Equation différentielle à variables séparables

C'est une équation du type :

$$P(x) Q(y) \frac{dy}{dx} + R(x) S(y) = 0 \quad (4.2)$$

C'est-à-dire du type :

$$y' = \frac{f(x)}{g(y)} \quad (4.3)$$

On peut alors écrire :

$$g(y) dy = f(x) dx \quad (4.4)$$

D'où une primitive :

$$\int g(y) dy = \int f(x) dx + C \quad (4.5)$$

On a une relation entre x et y qui ne dépend que de la constante arbitraire C .

4.2.2 Equation différentielle homogène

4.2.2.1 Définition

C'est une équation du type :

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad (4.6)$$

4.2.2.2 Intégration par changement de fonction

On pose : $y = tx$. Donc :

$$\frac{dy}{dx} = t + x \frac{dt}{dx} = f(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{x} = \frac{dt}{f(t) - t} \quad (4.7)$$

On est ramené à une équation à variables séparables qu'on intègre :

$$\ln\left(\frac{x}{x_0}\right) = \int_{t_0}^t \frac{du}{f(u) - u} = \varphi(t) \quad (4.8)$$

$$\Rightarrow x = x_0 e^{\varphi(t)} \quad \text{et} \quad y = x_0 t e^{\varphi(t)}$$

§13.39

4.2.2.3 Changement de variable en coordonnées polaires

On pose :

$$\begin{cases} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{y}{x} &= \tan \theta \\ dx &= \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta \\ dy &= \sin \theta dr + r \cos \theta d\theta \end{cases} \quad (4.9)$$

Donc :

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \Leftrightarrow \quad (4.10)$$

$$\frac{\sin \theta dr + r \cos \theta d\theta}{\cos \theta dr - r \sin \theta d\theta} = f(\tan \theta) = \frac{\tan \theta \frac{dr}{d\theta} + r}{\frac{dr}{d\theta} - r \tan \theta} \quad (4.11)$$

$$\Leftrightarrow \frac{dr}{r} = \frac{1 + \tan \theta f(\tan \theta)}{f(\tan \theta) - \tan \theta} d\theta \quad (4.12)$$

qui est une équation différentielle à variables séparables.

4.2.3 Différentielle totale exacte**4.2.3.1 Forme générale**

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0 \quad (4.13)$$

On a une différentielle totale exacte si :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (4.14)$$

En effet, on peut alors poser :

$$P = \frac{\partial F}{\partial x} \quad \text{et} \quad Q = \frac{\partial F}{\partial y} \quad (4.15)$$

et identifier :

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = P dx + Q dy = 0 \quad (4.16)$$

donc :

$$F(x, y) = k \quad (4.17)$$

Le lemme de Schwarz est ainsi vérifié car :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right) = \frac{\partial Q}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) = \frac{\partial P}{\partial y} \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} \quad (4.18)$$

4.2.3.2 Intégration

On intègre selon x :

$$F = \int P dx + C(y) \quad (4.19)$$

On différencie par rapport à y :

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\int P dx \right] + \frac{dC(y)}{dy} = Q \quad (4.20)$$

D'où :

$$\frac{dC(y)}{dy} = Q - \frac{\partial}{\partial y} \left[\int P dx \right] \quad (4.21)$$

qu'on intègre pour avoir $C(y)$ qu'on reporte dans l'Eq. 4.19.

4.2.4 Equation différentielle linéaire

4.2.4.1 Définition

On appelle **Equation Différentielle Linéaire (EDL)** du premier ordre une équation du type :

$$y' + a(x)y = b(x) \quad (4.22)$$

4.2.4.2 Méthode d'intégration

— solution générale de l'équation sans second membre (équation à variables séparables) :

$$\frac{dy}{dx} + a(x)y = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = -a(x) dx \quad (4.23)$$

Notons :

$$\varphi(x) = \int_{x_0}^x -a(u) du \Leftrightarrow y_{g_0} = \lambda e^{\varphi(x)} = \lambda y_0 \quad (4.24)$$

— solution particulière de l'équation avec 2nd membre (variation de la constante) :

$$y = \lambda(x)y_0 \quad (4.25)$$

$$y' = \lambda'(x)y_0 + \lambda(x)y_0' \quad (4.26)$$

donc

$$\lambda'(x)y_0 + \underbrace{\lambda(x)y_0'}_0 = b(x) \quad (4.27)$$

$$\Rightarrow \lambda' y_0 = b(x) \Rightarrow \lambda' = \frac{b(x)}{y_0} = b(x) e^{-\varphi(x)} \quad (4.28)$$

On intègre : $\lambda(x) = \int b(x) e^{-\varphi(x)} dx$ (sans introduire de constante supplémentaire puisqu'on cherche une solution particulière)

$$\Rightarrow y_p = \lambda(x) y_0. \quad \boxed{\S 13.35}$$

4.2.4.3 Théorème

La solution générale de l'équation complète est la somme d'une solution particulière de l'équation complète et de la solution générale de l'équation sans second membre :

$$y = y_{g_0} + y_p = e^{\varphi(x)} \left(C + \int b(x) e^{-\varphi(x)} dx \right) \quad (4.29)$$

4.3 Equation différentielle linéaire d'ordre n

4.3.1 Définition

C'est une équation du type :

$$a_0(x)y + a_1(x)y' + \dots + a_n(x)y^{(n)} = b(x) \quad (4.30)$$

4.3.2 Equation sans second membre

$$F_n[y] = a_0(x)y + a_1(x)y' + \dots + a_n(x)y^{(n)} = 0 \quad (4.31)$$

4.3.2.1 Théorème 1

Si $y_k(x)$ ($k = 1 \dots p$) sont p solutions particulières de $F_n[y] = 0$, alors $\sum_{k=1}^p c_k y_k(x)$ est aussi une solution :

$$F_n[y_k(x)] = 0 \quad (k = 1 \dots p) \Rightarrow F_n \left[\sum_{k=1}^p c_k y_k(x) \right] = 0 \quad (4.32)$$

Preuve : linéarité et absence de second membre.

4.3.2.2 Wronskien

Si $y_k(x)$ ($k = 1 \dots n$) sont n solutions particulières telles que :

$$W = \Delta(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} \neq 0 \quad (4.33)$$

on dit que $(y_1 \dots y_n)$ forme un **système fondamental de solutions**.

Alors : $y(x) = \sum_{k=1}^n c_k y_k(x)$ est l'intégrale générale où les c_k sont des constantes arbitraires.

4.3.2.3 Théorème 2

Si n fonctions $y_k(x)$, avec ($k = 1 \dots n$), sont liées par une relation linéaire à coefficients non tous nuls du genre : $\sum_{k=1}^n c_k y_k(x) = 0$, alors leur wronskien est identiquement nul.

4.3.2.4 Connaissance d'intégrales particulières $y_{p_0}(x)$

On abaisse l'ordre de l'équation différentielle d'une unité en posant :

$$y(x) = y_{p_0}(x) z(x) \quad (4.34)$$

et en faisant de $z(x)$ la nouvelle fonction inconnue.

4.3.2.5 Exemple

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \quad (4.35)$$

y_{p_0} = intégrale particulière.

$$\text{Posons : } y = z y_{p_0} \Rightarrow \begin{cases} y' &= z y'_{p_0} + z' y_{p_0} \\ y'' &= z'' y_{p_0} + 2z' y'_{p_0} + z y''_{p_0} \end{cases}$$

D'où l'équation devient :

$$z \left[\underbrace{y''_{p_0} + P(x)y'_{p_0} + Q(x)y_{p_0}}_0 \right] + z' [2y'_{p_0} + P(x)y_{p_0}] + z'' y_{p_0} = 0 \quad (4.36)$$

$$\Rightarrow z'' + z' \left[P(x) + 2 \frac{y'_{p_0}}{y_{p_0}} \right] = 0 \quad (4.37)$$

On pose : $u = z'$; on a donc réduit l'ordre de l'équation différentielle d'une unité :

$$u' + u \left[P(x) + 2 \frac{y'_{p0}}{y_{p0}} \right] = 0 \quad (4.38)$$

(équation sans 2nd membre du 1^{er} ordre qu'on sait résoudre).

Raisonnement récurrent...

4.3.3 Equation avec second membre

$$F_n[y] = a_n(x)y^{(n)} + \dots + a_k(x)y^{(k)} + \dots + a_0(x)y = b(x) \quad (4.39)$$

4.3.3.1 Théorème

La solution générale est la somme d'une solution particulière de l'équation complète et de la solution générale de l'équation sans second membre :

$$y_g(x) = y_p + y_0 = y_p + \sum_{k=1}^n c_k y_k(x) \quad (4.40)$$

4.3.3.2 Solution particulière : variation de la constante

Exemple d'une équation différentielle du 2nd ordre :

$$F_2[y] = y'' + P(x)y' + Q(x)y = b(x) \quad (4.41)$$

N.B. : Il est important d'avoir un coefficient 1 devant le degré le plus élevé de la dérivée (ici y'').

— Intégrale générale de l'équation sans 2nd membre :

$$y_0 = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \quad (4.42)$$

— On fait varier les constantes :

$$\lambda_1 = \lambda_1(x) \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \lambda_2(x) \quad (4.43)$$

D'où :

$$y' = \lambda'_1 y_1 + \lambda_1 y'_1 + \lambda'_2 y_2 + \lambda_2 y'_2 \quad (4.44)$$

On impose la condition :

$$\lambda'_1 y_1 + \lambda'_2 y_2 = 0 \quad (4.45)$$

D'où : $y'' = \lambda'_1 y'_1 + \lambda_1 y''_1 + \lambda'_2 y'_2 + \lambda_2 y''_2$

et $F_2[y] = b(x)$ s'écrit :

$$\lambda_1 \left[\underbrace{y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1}_0 \right] + \lambda_2 \left[\underbrace{y_2'' + P(x)y_2' + Q(x)y_2}_0 \right] + \lambda_1' y_1' + \lambda_2' y_2' = b(x) \quad (4.46)$$

— D'où le système :

$$\begin{cases} \lambda_1' y_1 + \lambda_2' y_2 &= 0 \\ \lambda_1' y_1' + \lambda_2' y_2' &= b(x) \end{cases} \quad (4.47)$$

qui permet de calculer $\lambda_1'(x)$ et $\lambda_2'(x)$ car (y_1, y_2) est un système fondamental de solutions.

Donc :

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0 \quad (4.48)$$

On en déduit : (λ_1, λ_2) et la solution particulière :

$$y_p(x) = \lambda_1(x)y_1 + \lambda_2(x)y_2 \quad (4.49)$$

— Finalement, la solution générale de l'équation complète est la somme :

$$y_g(x) = y_p(x) + y_0(x) = y_p(x) + C_1 y_1 + C_2 y_2 \quad (4.50)$$

4.4 EDL à coefficients constants

C'est une équation du type (où les a_k sont des constantes) :

$$a_0 y(x) + a_1 y' + \dots + a_n y^{(n)} = \sum_{k=0}^n a_k y^{(k)}(x) = b(x) \quad (4.51)$$

On présente ici la méthode classique de résolution ; la méthode dite symbolique utilisant la transformée de Laplace est présentée en section 6.6.2.

4.4.1 Solution générale sans 2nd membre

On calcule les s racines distinctes r_k (réelles ou complexes et d'ordre de multiplicité m_k) du polynôme caractéristique :

$$\Phi(r) = a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_1 r + a_0 = 0.$$

La forme générale de la solution sans 2nd membre s'exprime alors comme une combinaison d'exponentielles :

$$y_{g_0}(x) = \sum_{k=1}^s P_k(x) e^{r_k x}$$

où $P_k(x)$ est un polynôme de degré $m_k - 1$ (comportant donc m_k constantes arbitraires qu'on peut éventuellement déterminer grâce aux conditions initiales).

4.4.2 Solution particulière avec 2nd membre

La solution particulière dépend de la nature du second membre :

- 2nd membre constant : $b(x) = A \Rightarrow y_p(x) = B$
- 2nd membre sinusoïdal : $b(x) = A \sin(\omega x + \phi) \Rightarrow y_p(x) = B \sin(\omega x + \psi)$
- 2nd membre polynomial : $b(x)$ de degré $d \Rightarrow y_p(x)$ polynôme de degré $\leq d + 2$.

4.4.3 Solution globale

Finalement, la fonction $y(x)$ solution de l'EDL complète est la somme : $y(x) = y_{g0}(x) + y_p(x)$.

Si l'on connaît les conditions initiales, on peut déterminer les constantes arbitraires.

§13.5 §13.36 §13.37 §13.38

Chapitre 5

Fonction de la variable complexe

Préambule

L'intégration d'une fonction de la variable complexe est le fondement de toutes les transformées intégrales présentées dans les chapitres suivants : transformées de Laplace, de Fourier ou en Z . Le point d'orgue de ce chapitre est le théorème des résidus, couplé au développement en série de Laurent, outil puissant puisqu'il traduit le fait que, sous certaines conditions de continuité et dérivabilité, la connaissance d'une fonction uniquement sur un pourtour du plan complexe induit la connaissance de cette fonction partout à l'intérieur du domaine délimité par ce pourtour.

5.1 Nombre complexe

5.1.1 Définition

Un nombre complexe z peut être considéré comme l'affixe d'un point M de coordonnées cartésiennes (x, y) (Fig. 5.1a) :

$$z = \overrightarrow{OM} = x + iy = r \exp(i\theta) = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$\text{avec : } i^2 = -1 \Leftrightarrow i = \sqrt{-1} = \exp(i\frac{\pi}{2})$$

$$\text{Le module vaut : } r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\text{L'argument vaut : } \theta = \arg(z) = \arctan \frac{y}{x}. \quad \boxed{\S 13.2}$$

5.1.2 Somme

La somme $z = z_1 + z_2$ est définie par la résultante géométrique (Fig. 5.1b) :

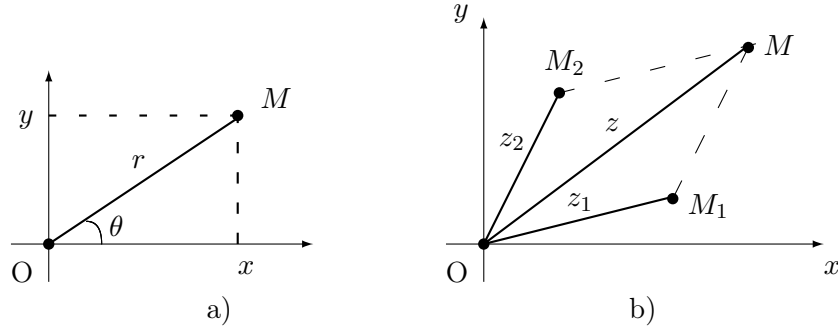


FIGURE 5.1 – a) Plan complexe ; b) Somme vectorielle.

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1M} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$$

Inégalité fondamentale pour l'étude des fonctions par majoration :

$$| |z_1| - |z_2| | \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad (5.1)$$

5.1.3 Produit

$$z_1 z_2 = r_1 \exp(i\theta_1) r_2 \exp(i\theta_2) = r_1 r_2 \exp[i(\theta_1 + \theta_2)] \quad (5.2)$$

Donc :

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \quad \text{et} \quad \arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \quad (5.3)$$

5.1.4 Quotient

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 \exp(i\theta_1)}{r_2 \exp(i\theta_2)} = \frac{r_1}{r_2} \exp[i(\theta_1 - \theta_2)] \quad (5.4)$$

Donc :

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad \text{et} \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2) \quad (5.5)$$

5.1.5 Complexe conjugué

Soit : $z = x + iy = r \cdot e^{i\theta}$ alors le complexe conjugué vaut : $\bar{z} = x - iy = r \cdot e^{-i\theta}$
 $z \cdot \bar{z} = r^2 = x^2 + y^2$

\bar{z} s'obtient par symétrie par rapport à l'axe Ox .

5.1.6 Racines n-ièmes

$$z = r.e^{i\theta} = r.e^{i(\theta+2k\pi)} \quad (5.6)$$

$$\sqrt[n]{z} = z^{1/n} = r^{1/n} \exp\left(i \frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \quad (5.7)$$

Il existe n racines n-ièmes qui se déduisent les unes des autres par rotation de $2\pi/n$ ($k = 0 \dots n - 1$).

5.2 Fonction de la variable complexe

5.2.1 Continuité

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe appartenant à un domaine (\mathcal{D}) . On considère une fonction $f(z)$ qui fait correspondre à z un nombre complexe image Z :

$$f : z \longrightarrow Z = f(z) \quad (5.8)$$

On peut séparer partie réelle et imaginaire de la fonction :

$$f(z) = Z = X(x, y) + iY(x, y).$$

Cette relation établit une correspondance entre 2 points complexes z et Z :

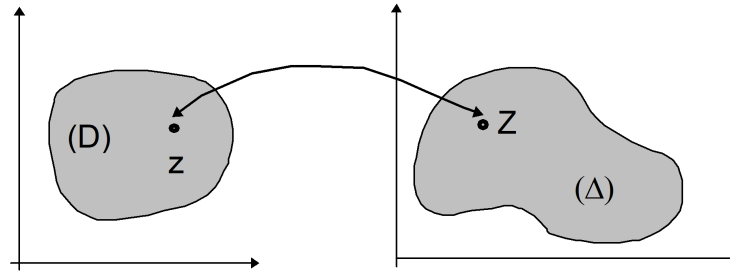


FIGURE 5.2 – Application du plan complexe.

On dit que $f(z)$ est continue en z_0 si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta \mid |z - z_0| < \eta \implies |f(z) - f(z_0)| < \epsilon \quad (5.9)$$

On en déduit qu'il suffit que $X(x, y)$ et $Y(x, y)$ soient continues par rapport aux variables x et y .

5.2.2 Dérivabilité

$f(z)$ est dérivable en z_0 si et seulement si la limite du rapport $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ existe et est indépendante du chemin suivi dans le plan complexe quand $z \rightarrow z_0$. On pose alors :

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) \quad (5.10)$$

5.2.2.1 Exemple 1

$Z = f(z) = \frac{3z-\bar{z}}{2}$ n'est pas dérivable en $z_0 = 0$ car :

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{z} = \frac{3(x+iy) - (x-iy)}{2(x+iy)} = \frac{x+2iy}{x+iy} = 1 + \frac{iy}{x+iy} = 1 + \frac{1}{1-i\frac{x}{y}} \quad (5.11)$$

5.2.2.2 Exemple 2

$Z = f(z) = z^2$ est dérivable en $z_0 = 0$ car :

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} z = 0 \quad (5.12)$$

5.2.3 Relations de Cauchy

C'est une [CNS](#) pour que $Z = f(z)$ soit dérivable en z_0 . Il faut et il suffit que X et Y soient différentiables en z_0 et que leurs dérivées satisfassent :

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial Y}{\partial x} = -\frac{\partial X}{\partial y} \quad (5.13)$$

5.2.4 Réciproque

Si les relations de Cauchy sont satisfaites, alors on montre que :

$$f'(z_0) = \frac{\partial X}{\partial x} - i \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial X}{\partial x} + i \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial f(z)}{\partial x} \quad (5.14)$$

$$= \frac{\partial Y}{\partial y} + i \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y} - i \frac{\partial X}{\partial y} = -i \frac{\partial f(z)}{\partial y} \quad (5.15)$$

5.2.5 Holomorphie et analyticité

5.2.5.1 Définitions

— une fonction $f(z)$ dérivable en tout point d'un domaine (\mathcal{D}) du plan complexe est dite fonction holomorphe

- une fonction holomorphe dans tout le plan complexe est appelée fonction entière
- une fonction holomorphe dans un domaine (\mathcal{D}) , qui établit une bijection avec le domaine image (Δ) , est dite fonction univalente.

5.2.5.2 Propriétés

- la somme, le produit ou la composée de 2 fonctions holomorphes est holomorphe
- le quotient $f(z)/g(z)$ de 2 fonctions holomorphes dans (\mathcal{D}) est holomorphe dans (\mathcal{D}) sauf pour les points du plan complexe où $g(z) = 0$
- une fonction univalente admet une fonction inverse f^{-1} dont la dérivée vaut :

$$\frac{df^{-1}(Z)}{dZ} = \frac{1}{\frac{df(z)}{dz}} \quad (5.16)$$

5.2.5.3 Exemples de fonctions holomorphes

- les polynômes sont des fonctions holomorphes dans tout le plan complexe à distance finie :

$$P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k \quad (5.17)$$

$$P'(z) = \sum_{k=1}^n k a_k z^{k-1} \quad (5.18)$$

- les fractions rationnelles sont holomorphes dans tout le plan à distance finie sauf aux points p_i (pôles réels ou complexes d'ordre de multiplicité λ_i) :

$$\begin{aligned} \frac{P(z)}{Q(z)} &= E(z) + \sum_i \frac{A_{i,1}}{z - p_i} + \frac{A_{i,2}}{(z - p_i)^2} + \cdots + \frac{A_{i,\lambda_i}}{(z - p_i)^{\lambda_i}} \\ &= E(z) + \sum_i \sum_{j=1}^{\lambda_i} \frac{A_{i,j}}{(z - p_i)^j} \\ &= \text{partie entière} + \text{termes de première espèce} \end{aligned} \quad (5.19)$$

5.2.5.4 Remarque

Toute fonction holomorphe est analytique, c'est-à-dire continue et pourvue de dérivées de tous ordres elles-mêmes continues.

5.2.6 Harmonicité

Si les fonctions $X(x, y)$ et $Y(x, y)$ sont continues ainsi que les dérivées partielles 1ères et 2èmes, le lemme de Schwarz permet d'écrire :

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 X}{\partial y \partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 Y}{\partial y \partial x} \quad (5.20)$$

D'après la remarque du §. 5.2.5.4, le lemme de Schwarz s'applique à toute fonction holomorphe, d'où l'expression des laplaciens, en tenant compte des relations de Cauchy :

$$\Delta X = \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial Y}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial Y}{\partial x} \right) = 0 \quad (5.21)$$

$$\Delta Y = \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial X}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial X}{\partial x} \right) = 0 \quad (5.22)$$

Si X et Y satisfont dans le domaine \mathcal{D} d'holomorphie de $f(z)$ à l'équation dite de Laplace :

$$\Delta X = \Delta Y = 0 \quad (5.23)$$

alors on dit que ce sont 2 fonctions harmoniques associées (condition nécessaire mais non suffisante).

5.2.7 Réciproque

Si X est une fonction harmonique, c'est-à-dire :

- continue
- pourvue de dérivées continues au moins jusqu'à l'ordre 2
- satisfaisant l'équation de Laplace $\Delta X = 0$

alors on peut trouver $Y(x, y)$ en intégrant les équations de Cauchy de telle sorte que la fonction définie par $f(z) = X + iY$ soit une fonction holomorphe.

5.2.8 Points singuliers

5.2.8.1 Définition

- si $f(z)$ est définie en z_0 , alors z_0 est un point ordinaire
- si $f(z)$ n'est pas définie en z_0 , alors z_0 est un point singulier.

5.2.8.2 Singularité artificielle

Cas où $f(z)$ n'est pas holomorphe, mais reste bornée au voisinage de z_0 (qu'on note $\mathcal{V}(z_0)$) : il s'agit alors d'une discontinuité de 1^{re} espèce. On peut fixer arbitrairement la valeur de $f(z_0)$ pour rendre la fonction holomorphe en z_0 .

5.2.8.3 Pôle d'ordre p

Cas où :

- $f(z)$ non définie en z_0
- $1/f(z)$ définie en z_0
- $(z - z_0)^p f(z)$ définie en z_0

5.2.8.3.1 Exemple : soient $h(z)$ et $g(z)$ holomorphes, et $f(z)$ définie par :

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z - z_0)^p} + g(z) \quad (5.24)$$

C'est le développement classique au voisinage d'un pôle.

5.2.8.3.2 Définition : Une fonction qui n'admet pas d'autre singularité que ses pôles est dite méromorphe.

5.2.8.4 Points singuliers essentiels

Cas où :

- $f(z)$ non holomorphe en z_0
- $1/f(z)$ non holomorphe en z_0

Exemple : $f(z) = \exp(1/z)$ en $z_0 = 0$.

5.2.8.5 Cas du point à l'infini

Pour étudier ce cas, on pose : $u = 1/z$ et au lieu d'étudier : $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$ on étudie : $\lim_{u \rightarrow 0} \phi(u)$ où : $\phi(u) = f(1/u)$.

- $f(z)$ est holomorphe à l'infini si $\phi(u)$ est holomorphe au $\mathcal{V}(0)$
- $f(z)$ admet un pôle à l'infini si $\phi(u)$ admet un pôle pour $u = 0$

5.2.9 Fonctions uniformes et multiformes

Si (\mathcal{D}) est simplement connexe, $f(z)$ est uniforme, c'est-à-dire que pour un z donné, il existe une seule valeur de $Z = f(z)$.

Si (\mathcal{D}) n'est pas simplement connexe, $f(z)$ peut être multiforme, c'est-à-dire que $f(z)$ peut prendre plusieurs valeurs distinctes bien définies pour une même valeur de z appartenant à (\mathcal{D}) .

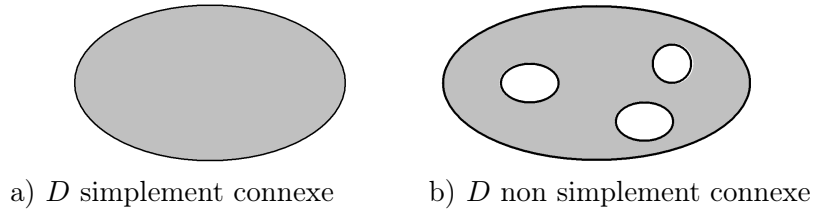


FIGURE 5.3 – Connexité d'un domaine.

Exemple de fonction multiforme

$$f(z) = z^{1/n} \quad (5.25)$$

Pour $z = r.e^{i\theta} = r.e^{i(\theta+2k\pi)}$, on a : $f(z) = r^{1/n}e^{i\theta/n}e^{i2k\pi/n}$ avec $k \in [0; n-1]$. Pour un même z , il y a donc n images Z .

5.2.10 Notion de point critique

Hypothèse : soient

- une fonction $f(z)$ multiforme,
- un point complexe z_0 et son image $Z_0 = f(z_0)$,
- un point a autre que z_0 .

On dit que a est point critique de $f(z)$ si, en faisant décrire au point z un contour fermé autour de a en partant de z_0 , on revient en z_0 avec une valeur de $f(z_0)$ différente de la valeur de départ Z_0 (Fig. 5.4).

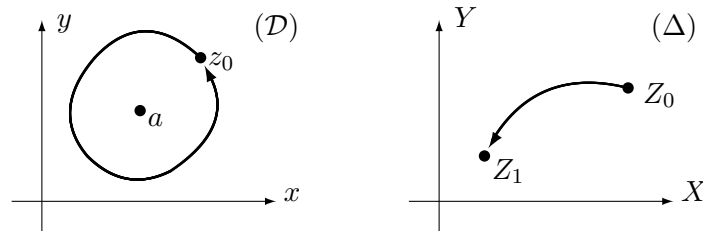


FIGURE 5.4 – Point critique.

5.2.11 Exemple de la fonction racine

$$f(z) = \sqrt{z} \quad (5.26)$$

$$z = r.e^{i\theta} = r.e^{i(\theta+2k\pi)} \quad (5.27)$$

$$Z = \sqrt{r}e^{i(\frac{\theta}{2}+k\pi)} \quad (5.28)$$

Il y a donc 2 déterminations, c'est-à-dire 2 valeurs de Z pour un même z_0 :

$$Z_1 = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}} \quad \text{pour } k \text{ pair} \quad (5.29)$$

$$Z_2 = \sqrt{r}e^{i(\frac{\theta}{2}+\pi)} \quad \text{pour } k \text{ impair} \quad (5.30)$$

Si l'on tourne autour de l'origine, on change de détermination. On dit que $a = 0$ est point critique de $f(z) = \sqrt{z}$.

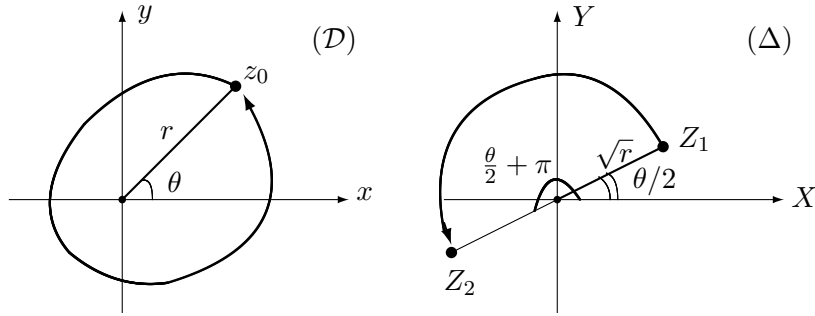


FIGURE 5.5 – Les 2 déterminations de la fonction racine.

5.2.12 Notion de coupure et choix d'une détermination

Dans un domaine (\mathcal{D}) , si l'on effectue un parcours fermé autour d'un point critique, la fonction $f(z)$ change de détermination. Pour que la valeur finale de $\text{Arg}Z$ soit égale à la valeur initiale lorsque le point z décrit une courbe fermée, c'est-à-dire pour retomber toujours sur la même détermination, on crée une coupure qui empêche de tourner autour du point critique a .

On définit ainsi les surfaces de Riemann qui uniformisent la fonction $f(z)$. Uniformiser la fonction, c'est introduire des coupures judicieuses pour rester toujours sur le même feuillet de Riemann, c'est-à-dire choisir une détermination donnée.

On appelle détermination principale la détermination telle que :

- $f(z)$ est réelle quand z est réel,
- 0 appartient à Z .

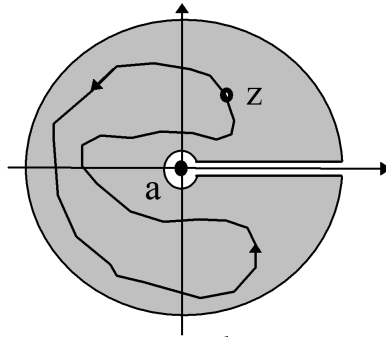
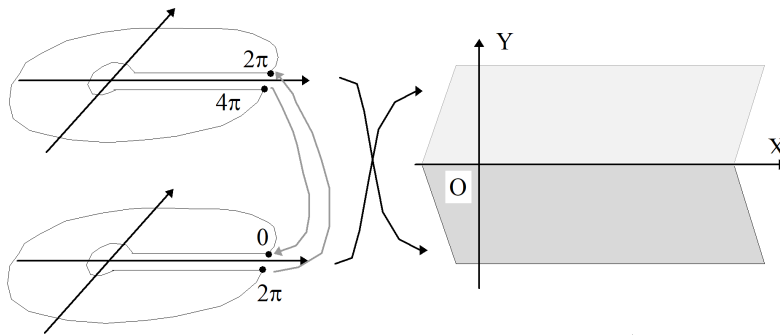


FIGURE 5.6 – Coupure.

5.2.12.1 Exemple 1 : $f(z) = \sqrt{z}$

FIGURE 5.7 – Feuilles de Riemann de $f(z) = \sqrt{z}$.

Coupe des feuillet de Riemann :

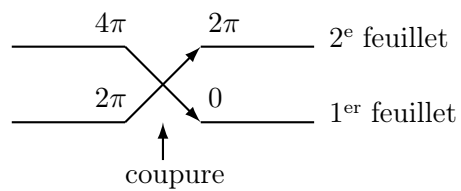


FIGURE 5.8 – Feuillet de Riemann vus en coupe.

5.2.12.2 Exemple 2 : $Z = f(z) = z^{1/n}$

Au plan z correspond un secteur de centre O et d'angle $2\pi/n$ dans le plan Z . A l'ensemble du plan Z correspondent n plans z distincts reliés entre eux par les coupures.

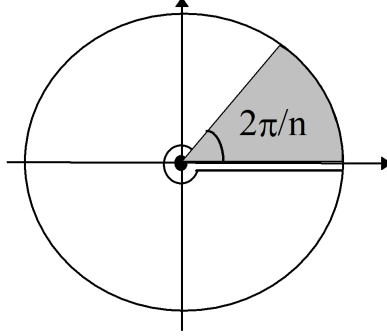


FIGURE 5.9 – Lieu image de la détermination principale de $f(z) = \sqrt[n]{z}$.

5.2.12.3 Exemple 3 : $Z = \log z$

On a : $z = r.e^{i\theta} = r.e^{i(\theta+2k\pi)}$.

On peut écrire : $z = e^Z = e^{X+iY}$, donc on identifie :

$$r = e^X \quad \text{et} \quad \theta + 2k\pi = Y \Rightarrow Z = \log z = \text{Log}(r) + i(\theta + 2k\pi) = Z_k \quad (5.31)$$

La fonction $\log(z)$ est donc multiforme avec un nombre infini de déterminations. On dit alors que 0 est un point critique logarithmique. La détermination principale correspond à $k = 0$, c'est-à-dire $\theta \in [0; 2\pi]$.

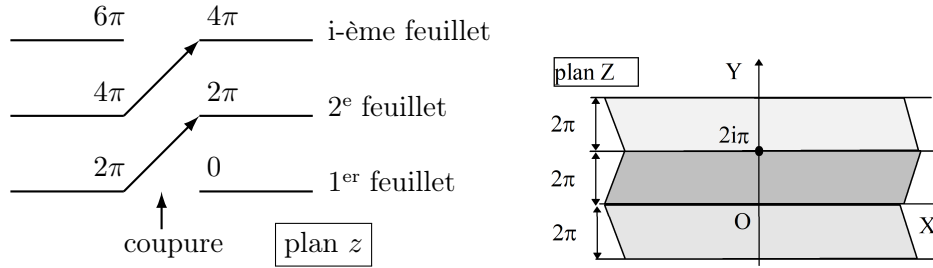
$$Z = \text{Log}r + i\theta \quad (5.32)$$

5.2.13 Définition générale de la notion de point critique**5.2.13.1 Points critiques des fonctions élémentaires**

La fonction : $Z = z^{1/m}$ avec $m > 0$ entier a pour points critiques :

$$\begin{cases} 0 & \text{est point critique algébrique d'ordre } m \\ \infty & \text{est point critique algébrique.} \end{cases}$$

Les fonctions : $\begin{cases} Z = z^a \\ Z = \log z \end{cases}$ avec $a \notin \mathbb{Z} \cup \mathbb{Q}$ ont pour points critiques :

FIGURE 5.10 – Feuillet de Riemann de $\log(z)$.

$\begin{cases} 0 & \text{est point critique logarithmique} \\ \infty & \text{est point critique logarithmique.} \end{cases}$
 Un point non critique est un point régulier.

5.2.13.2 Généralisation aux autres fonctions multiformes

Les fonctions multiformes sont des fonctions ayant des points critiques. L'étude se ramène généralement à :

$$Z = \log f(z) \quad \text{ou} \quad Z = [f(z)]^a \quad (5.33)$$

$$\text{avec } f(z) = P(z)/Q(z) \quad \text{et} \quad a \in \mathbb{C} \text{ ou } \mathbb{R} - \{\mathbb{Z}\} \text{ (non entier)} \quad (5.34)$$

Les points critiques sont généralement les zéros et les pôles de $f(z)$, ainsi que peut-être le point à l'infini.

5.2.13.3 Cas du point à l'infini

On pose : $k = \deg(P) - \deg(Q)$.

Pour : $Z = \log f(z)$, l' ∞ est point critique logarithmique **SSI** : $k \neq 0$

Pour : $Z = [f(z)]^a$, l' ∞ est point critique (algébrique ou logarithmique) **SSI** : $k a \notin \mathbb{Z}$ (non entier).

5.2.13.4 Cas des pôles et des zéros

Si $a = 1/m$, les zéros et pôles de $f(z)$ ne sont pas critiques pour la fonction $f(z)^{1/m}$ s'ils ont un ordre de multiplicité multiple de m . En effet :

$$f(z)^{\frac{1}{m}} = \left(\frac{(z - z_0)^{km}}{(z - p_0)^{lm}} \right)^{\frac{1}{m}} = \frac{(z - z_0)^k}{(z - p_0)^l} \quad (5.35)$$

5.2.13.5 Exemple 1

$$f(z) = \sqrt[3]{\frac{z^2}{1-z}}$$

points critiques : $z = 0$; $z = 1$; $z = \infty$ (cf. Fig. 5.11a)

5.2.13.6 Exemple 2

$$f(z) = \sqrt[3]{\frac{z-1}{z}}$$

points critiques : $z = 0$; $z = 1$ (cf. Fig. 5.11b)

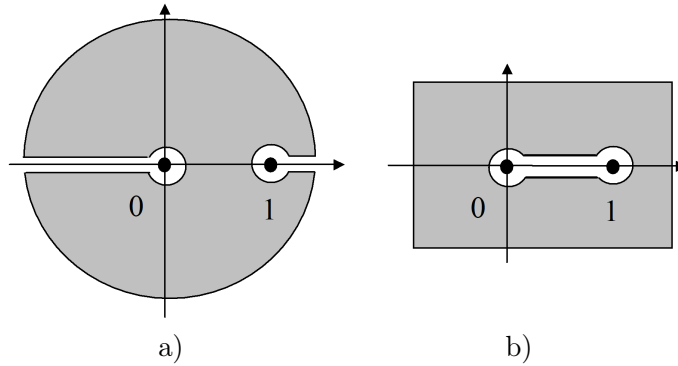


FIGURE 5.11 – Coupures : a) exemple 1 ; b) exemple 2.

5.3 Fonction définie par une série entière**5.3.1 Série de la variable complexe**

Soit $w_n = u_n + iv_n$.

$\sum_{n=0}^{\infty} w_n$ converge si $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ convergent.

5.3.2 Convergence absolue

$$|w_n| \leq |u_n| + |v_n| \implies \left| \sum w_n \right| \leq \sum |w_n| \leq \sum |u_n| + \sum |v_n| \quad (5.36)$$

Donc la convergence absolue des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ implique la convergence de la série $\sum w_n$.

5.3.3 Rappel sur la convergence des séries

Soit une série de terme général u_n .

5.3.3.1 Condition nécessaire de convergence

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0 \quad (5.37)$$

5.3.3.2 Théorème de Cauchy

$$\sum u_n \text{ converge} \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists N \mid \forall n > N \text{ et } \forall m > N, |u_n + \dots + u_m| < \epsilon \quad (5.38)$$

Remarque : la convergence absolue entraîne la convergence simple car :

$$|u_n + \dots + u_m| \leq |u_n| + \dots + |u_m| \quad (5.39)$$

5.3.3.3 Critère de Cauchy

On calcule la limite supérieure, notée $\limsup = \overline{\lim}$:

$$\ell_{sup} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} \quad (5.40)$$

- Si $\ell_{sup} < 1$, alors la série $\sum u_n$ converge.
- Si $\ell_{sup} > 1$, alors la série $\sum u_n$ diverge.
- Si $\ell_{sup} = 1$, on ne peut conclure.

5.3.3.4 Critère de d'Alembert

On calcule aussi la limite inférieure, notée $\liminf = \underline{\lim}$:

$$\ell_{sup} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \quad \text{et/ou} \quad \ell_{inf} = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \quad (5.41)$$

- Si $\ell_{sup} < 1$, alors la série $\sum u_n$ converge.
- Si $\ell_{inf} > 1$, alors la série $\sum u_n$ diverge.
- Dans les autres cas ($\ell_{inf} \leq 1 \leq \ell_{sup}$), on ne peut conclure.

Donc le critère de d'Alembert est moins performant que le critère de Cauchy.

5.3.3.5 Comparaison avec une intégrale

Soit $f(x)$ une fonction définie, continue, > 0 et décroissante pour $x \geq 1$.

Alors : $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ et $\int_1^{\infty} f(x)dx$ sont de même nature.

5.3.3.6 Série de Riemann

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ et $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx$ convergent pour $\alpha > 1$.

D'où le critère de Riemann : si $|x^\alpha f(x)|$ reste borné pour $x \rightarrow \infty$ et $\alpha > 1$, alors : $\int_1^\infty f(x) dx$ converge et la série $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ aussi.

5.3.4 Convergence uniforme

Soit la série : $u(z) = \sum_{n=1}^\infty u_n(z)$

5.3.4.1 Théorème de Cauchy

La série $u(z)$ converge uniformément ([Convergence Uniforme \(CU\)](#)) si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ indépendant de } z \mid \forall n > N, \forall m > N, |u_n(z) + \dots + u_m(z)| < \epsilon \quad (5.42)$$

5.3.4.2 Règle de Weierstrass

La série $u(z)$ converge uniformément ([CU](#)) si :

$$\exists z_0 \mid \forall |z| \geq |z_0|, \text{ et } \forall n > N \text{ indépendant de } z, |u_n(z)| \leq a_n \text{ indépendant de } z \quad (5.43)$$

où a_n est le terme général d'une série à termes positifs convergente.

5.3.4.3 Convergence absolue \Rightarrow Convergence uniforme

$$\sum_{n=1}^\infty |u_n(z)| \text{ converge} \Rightarrow u(z) = \sum_{n=1}^\infty u_n(z) \text{ converge uniformément } (\text{CU}).$$

5.3.4.4 Critère d'Abel

Soit :

$$u(z) = \sum_{n=1}^\infty u_n(z) = \sum_{n=1}^\infty \epsilon_n(z) v_n(z). \quad (5.44)$$

Alors la série $u(z)$ [CU](#) si :

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n(z) = 0$
2. $\sum |\epsilon_n(z) - \epsilon_{n+1}(z)|$ converge
3. $\forall (n, m), |v_n(z) + \dots + v_m(z)| \leq A$ où A est indépendant de n et m .

Cas Particulier : Le critère d'Abel s'applique souvent dans le cas où ϵ_n est une suite à termes > 0 , indépendante de z et décroissante vers 0. Ainsi les deux premières conditions du critère sont remplies. Il faut et il suffit alors que : $|v_0(z) + \dots + v_m(z)| \leq A$, où A est indépendant de m , pour que $u(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n(z) v_n(z)$ converge uniformément.

5.3.4.5 Intégration d'une série CU

Si une série $u(t)$ est CU dans l'intervalle $[a, b]$, alors :

$$\int_a^b \left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \right] dt = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_a^b u_n(t) dt \right] \quad (5.45)$$

c'est-à-dire qu'on peut **intervertir l'ordre des sommations** si la convergence est uniforme.

5.3.5 Série entière de la variable complexe

5.3.5.1 Définition

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (5.46)$$

avec $a_n \in \mathbb{C}$ et $z = x + iy$

5.3.5.2 Convergence

Posons :

$$\ell_a = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \quad (5.47)$$

et appliquons le critère de Cauchy :

$$\ell_{sup} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n z^n|} = |z| \cdot \ell_a \quad (5.48)$$

Si : $\ell_{sup} = |z| \cdot \ell_a < 1$, alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge.

Ceci permet de définir le rayon de convergence R :

$$|z| < R = \frac{1}{\ell_a} \implies f(z) \text{ converge} \quad (5.49)$$

5.3.5.3 Théorème

Quand $z \in$ au disque de convergence, la série entière est uniformément convergente et sa somme est une fonction continue de z . La dérivée a même rayon de convergence et s'obtient en dérivant terme à terme.

5.3.5.4 Cas particulier

Si $R = \infty$, $f(z)$ est holomorphe dans tout le plan complexe. On parle alors de fonction entière.

5.3.5.5 Généralisation

On peut définir la fonction $f(z)$ par une série entière au $\mathcal{V}(z_0)$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (5.50)$$

Cette série converge pour $|z - z_0| < R$, c'est-à-dire dans le cercle (z_0, R) . C'est le principe du prolongement analytique à l'ensemble du plan complexe, en excluant les points isolés (critiques ou singuliers).

5.3.6 Développement en série de Taylor

Le [Développement en Série de Taylor \(DST\)](#) d'une fonction $f(z)$ s'exprime :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \quad (5.51)$$

5.3.6.1 Développement de Mac-Laurin

C'est un cas particulier du développement en série de Taylor calculé en $z_0 = 0$.

5.3.6.2 Fonction analytique

- continue,
- aux dérivées de tous ordres continues,
- développable en série de Taylor.

On a l'équivalence : $f(z)$ analytique dans $(\mathcal{D}) \Leftrightarrow f(z)$ holomorphe dans (\mathcal{D})

Donc toute fonction holomorphe peut être définie par une série de la variable complexe. On peut en particulier calculer les développements en série entière des fonctions holomorphes.

5.3.7 Fonctions entières

5.3.7.1 Fonction exponentielle $f(z) = e^z$

$$\frac{de^z}{dz} = e^z \quad (5.52)$$

Donc pour $z_0 = 0$, on a :

$$f^{(n)}(0) = 1 \implies f(z) = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad (5.53)$$

Calcul du rayon de convergence :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z^{n+1}n!}{(n+1)!z^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|z|}{n+1} = 0 \implies R = \infty \quad (5.54)$$

donc e^z est une fonction entière car holomorphe dans tout le plan complexe. e^z est périodique de période $2i\pi$.

5.3.7.2 Fonctions trigonométriques

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \quad (5.55)$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \quad (5.56)$$

Ces fonctions sont holomorphes dans tout le plan complexe.

Attention ! $|\cos z|$ et $|\sin z|$ peuvent être > 1 (cf. § 5.3.7.3.2)

5.3.7.3 Fonctions hyperboliques

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} z^{2n} \quad (5.57)$$

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1} \quad (5.58)$$

Ces deux fonctions sont holomorphes dans tout le plan complexe.

5.3.7.3.1 Remarque

$$\begin{cases} \cosh z = \cos iz \\ \cos z = \cosh iz \\ i \tan z = \tanh iz \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \sinh z = \frac{1}{i} \sin iz = -i \sin iz \\ \sin z = -i \sinh iz \\ i \tanh z = \tan iz \end{cases} \quad (5.59)$$

5.3.7.3.2 Possibilité d'avoir $\cos z > 1$

$$\cos z = \cos(x + iy) = \cos x \cos iy - \sin x \sin iy = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y \quad (5.60)$$

donc $\cos z = a \in \mathbb{R} > 1$ est possible pour :

$$\begin{cases} \cos x \cosh y = a \\ \sin x \sinh y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k\pi \\ y = \arg \cosh(a) \end{cases} \quad (5.61)$$

5.3.8 Série géométrique et fonction $\log(1+z)$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n = \frac{1}{1+z} \quad (5.62)$$

avec comme rayon de convergence : $R = 1$ car on a :

$$\ell_a = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1 \quad (5.63)$$

Par intégration de $f(z)$ en choisissant la constante d'intégration nulle, on obtient le développement en série entière correspondant à la détermination principale de la fonction multiforme $\log(1+z)$, valable pour $|z| < 1$:

$$\text{Log}(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{n+1}}{n+1} \quad \text{pour } |z| < 1 \quad (5.64)$$

5.3.9 Convention

Les déterminations principales des fonctions multiformes usuelles sont notées avec une première lettre majuscule.

5.4 Intégration d'une fonction de la variable complexe

5.4.1 Intégrale de Cauchy

5.4.1.1 Définition

Soit $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ une fonction analytique de la variable complexe $z = x + iy$. On veut définir l'intégrale de $f(z)$ sur un arc $AB : \int_{AB} f(z)dz$

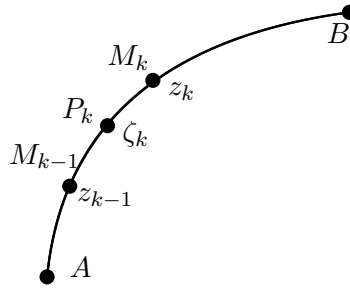


FIGURE 5.12 – Arc d'intégration AB .

On pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}) \quad (5.65)$$

où ζ_k est l'affixe d'un point $P_k \in [M_{k-1}M_k]$

Si : $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, alors on appelle cette limite S l'intégrale de $f(z)$ sur AB :

$$S = \int_{AB} f(z)dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}) \quad (5.66)$$

Si le module $|f(z)|$ est borné, l'intégrale existe :

$$|f(z)| < M \implies \left| \int_{AB} f(z)dz \right| \leq \int_{AB} |f(z)|dz \leq M \int_{AB} dz = M.s \quad (5.67)$$

où s est la longueur de l'arc AB .

5.4.1.2 Intégration des séries

Une série uniformément convergente (UC) est intégrable terme à terme. Soit :

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(z) \quad (5.68)$$

Si la série est U.C., alors :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N / \forall n \geq N, R_n = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(z) \right| < \epsilon \quad (5.69)$$

donc :

$$\left| \int_{AB} f(z) dz - \sum_{k=0}^n \int_{AB} u_k(z) dz \right| \leq \int_{AB} R_n(z) dz \leq \epsilon.s \quad (5.70)$$

5.4.2 Théorème de Cauchy

Soit :

- (\mathcal{C}) une courbe ou un ensemble de courbes simples, fermées, rectifiables, limitant un domaine (\mathcal{D}) et orientées de manière à laisser (\mathcal{D}) sur la gauche
- une fonction $f(z)$:
 - holomorphe dans (\mathcal{D})
 - continue sur (\mathcal{C}) .

Alors :

$$\oint_{(C)} f(z) dz = 0 \quad (5.71)$$

Preuve : $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ où P et Q sont des fonctions continues

$$\oint_C f(z) dz = \oint_C (P + iQ)(dx + idy) = \oint_C P dx - Q dy + i \oint_C Q dx + P dy \quad (5.72)$$

or $f(z)$ est holomorphe donc vérifie les relations de Cauchy :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x} \quad (5.73)$$

De plus, la formule de Green-Riemann s'applique à P et Q :

$$\oint_{(C)} X dx + Y dy = \int \int_{S(C)} \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dx dy \quad (5.74)$$

soit ici :

$$\oint_{(C)} P dx - Q dy = \int \int_{S(C)} \left(-\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0 \quad (5.75)$$

$$\oint_{(C)} Q dx + P dy = \int \int_{S(C)} \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy = 0 \quad (5.76)$$

d'après les relations de Cauchy.

Donc :

$$\oint_{(C)} f(z) dz = 0 + i0 = 0 \quad (5.77)$$

CQFD.

5.4.3 Notion de primitive (application du théorème de Cauchy)

Soit :

- $f(z)$ holomorphe dans un domaine (\mathcal{D}) simplement connexe.
- z_0 et z deux points de (\mathcal{D})
- Γ et Γ' deux courbes simples joignant z_0 à z et définies dans (\mathcal{D}) .

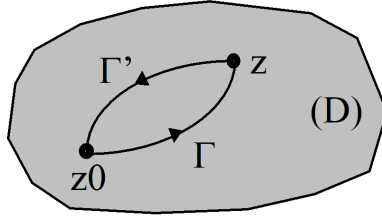


FIGURE 5.13 – Deux chemins d'intégration équivalents.

On applique le théorème de Cauchy :

$$\underbrace{\int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta}_{\Gamma} + \underbrace{\int_z^{z_0} f(\zeta) d\zeta}_{\Gamma'} = 0 \implies \underbrace{\int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta}_{\Gamma} = \underbrace{\int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta}_{\Gamma'} \quad (5.78)$$

L'intégrale est indépendante du chemin suivi. On peut donc définir $F(z)$ (à une constante additive près) :

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta \quad (5.79)$$

5.4.3.1 Théorème

$F(z)$ est une fonction holomorphe dans (\mathcal{D}) simplement connexe et a pour dérivée $f(z)$ en tout point du domaine.

5.4.3.2 Preuve

Comme $F(z_0) = 0$, on a :

$$\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} = \frac{1}{z - z_0} \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta \quad (5.80)$$

De plus, on peut toujours écrire :

$$f(z_0) = \frac{1}{z - z_0} \int_{z_0}^z f(z_0) d\zeta \quad (5.81)$$

Donc :

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - f(z_0) \right| &= \left| \frac{1}{z - z_0} \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta - \frac{1}{z - z_0} \int_{z_0}^z f(z_0) d\zeta \right| \\ &= \left| \frac{1}{z - z_0} \int_{z_0}^z [f(\zeta) - f(z_0)] d\zeta \right| \end{aligned} \quad (5.82)$$

Comme $f(z)$ est continue dans (\mathcal{D}) , on a :

$$\forall z_0 \in (\mathcal{D}), \forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \mid |\zeta - z_0| < \eta \implies |f(\zeta) - f(z_0)| < \epsilon \quad (5.83)$$

Donc :

$$\left| \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - f(z_0) \right| \leq \left| \frac{1}{z - z_0} \int_{z_0}^z \epsilon d\zeta \right| = \epsilon \quad (5.84)$$

c'est-à-dire que : $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} = f(z_0)$
CQFD

5.4.4 Formule de Cauchy

Soit :

- un domaine (\mathcal{D}) limité par une frontière rectifiable (\mathcal{C})
- une fonction $f(z)$ holomorphe dans (\mathcal{D}) et continue sur (\mathcal{C})
- un point $z_0 \in (\mathcal{D})$
- un cercle (γ) de centre z_0 et de rayon $r \rightarrow 0$
- un domaine (\mathcal{D}_0) extérieur à (γ) et intérieur à (\mathcal{C}) .

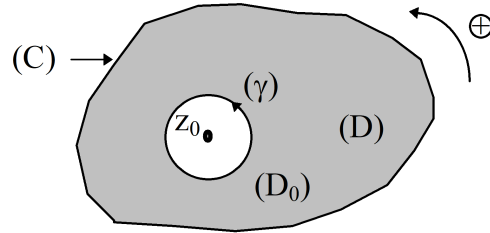


FIGURE 5.14 – Illustration du domaine.

On applique le théorème de Cauchy à la fonction : $g(z) = \frac{f(z)}{z - z_0}$ dans le domaine (\mathcal{D}_0) où elle est holomorphe :

$$\oint_{C^+} \frac{f(z)}{z - z_0} dz + \oint_{\gamma^-} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 0 \quad (5.85)$$

Sur le cercle $(\gamma) : z = z_0 + r.e^{i\theta}$ et $dz = ir.e^{i\theta}d\theta$ avec $0 \leq \theta \leq 2\pi$
 $f(z)$ continue dans (\mathcal{D}) :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta / |z - z_0| = r < \eta \implies |f(z) - f(z_0)| < \epsilon \quad (5.86)$$

Donc :

$$\left| \oint_{\gamma^+} \frac{f(z)}{(z - z_0)} dz - \oint_{\gamma^+} \frac{f(z_0)}{(z - z_0)} dz \right| < \epsilon \left| \oint_{\gamma^+} \frac{1}{(z - z_0)} dz \right| \quad (5.87)$$

Or :

$$\oint_{\gamma^+} \frac{1}{(z - z_0)} dz = \int_0^{2\pi} \frac{ir.e^{i\theta}}{r.e^{i\theta}} d\theta = i \int_0^{2\pi} d\theta = i2\pi \quad (5.88)$$

D'où :

$$\left| \oint_{\gamma^+} \frac{f(z)}{(z - z_0)} dz - f(z_0)2i\pi \right| < 2\pi\epsilon \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0 \quad (5.89)$$

Donc :

$$\oint_{\gamma^+} \frac{f(z)}{(z - z_0)} dz = 2i\pi f(z_0) = - \oint_{\gamma^-} \frac{f(z)}{(z - z_0)} dz = \oint_{C^+} \frac{f(z)}{(z - z_0)} dz \quad (5.90)$$

D'où la formule de Cauchy :

$$\frac{1}{2i\pi} \oint_{C^+} \frac{f(z)}{(z - z_0)} dz = f(z_0) \quad (5.91)$$

Interprétation essentielle : Si l'on connaît $f(z)$ sur (\mathcal{C}) , on peut obtenir par cette formule intégrale la valeur de la fonction $f(z_0)$ **en tout point** z_0 intérieur au domaine (\mathcal{D}) .

5.4.5 Développement de $f(z)$ holomorphe en série entière

5.4.5.1 Développement en série entière sur un contour

Hypothèses (cf. Fig. 5.15) : soient

- un domaine (\mathcal{D}) limité par une frontière rectifiable, *i.e.* contour (\mathcal{C})
- une fonction $f(z)$ holomorphe dans (\mathcal{D})
- un point $z_0 \in (\mathcal{D})$
- un cercle (γ) entourant z_0 et contenu dans (\mathcal{D})
- un point z intérieur à (γ) .

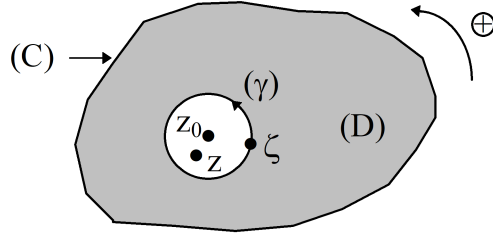


FIGURE 5.15 – Illustration du domaine.

Si $\zeta \in (\gamma)$, on peut écrire :

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} \quad (5.92)$$

On reconnaît la somme d'une série géométrique de raison inférieure à 1.

En effet : $\left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| < 1$ donc :

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \quad (5.93)$$

Alors d'après la convergence uniforme :

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma^+} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)} d\zeta &= \oint_{\gamma^+} f(\zeta) \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \right] d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \int_{\gamma^+} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \end{aligned} \quad (5.94)$$

Appliquons la formule de Cauchy :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\gamma^+} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)} d\zeta \implies \quad (5.95)$$

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \oint_{\gamma^+} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \quad (5.96)$$

Or le développement en série entière (DSE) de $f(z)$ est donné par l'Eq. 5.50 :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (5.97)$$

D'où, en identifiant a_n et en appliquant le théorème de Cauchy :

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\gamma^+} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta = \frac{1}{2i\pi} \oint_{C^+} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \quad (5.98)$$

La série entière obtenue est nécessairement le développement en série de Taylor (DST) de la fonction holomorphe $f(z)$ au $\mathcal{V}(z_0)$ (Eq. 5.51) :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \quad (5.99)$$

$$\Rightarrow f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2i\pi} \oint_{C^+} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \quad (5.100)$$

5.4.5.2 Existence des dérivées

Une fonction $f(z)$ holomorphe dans (\mathcal{D}) est pourvue de dérivées de tous ordres, elles-mêmes holomorphes dans (\mathcal{D}) .

Conclusion : holomorphie \Leftrightarrow analytité (ce sont deux termes synonymes).

5.5 Théorème des résidus

5.5.1 Développement en série de Laurent autour d'un point singulier isolé

Soient :

- $f(z)$ une fonction de la variable complexe
- z_0 un point singulier essentiel isolé de $f(z)$
- $\exists R$ et R' (avec $0 < R' < R$) tels que $f(z)$ soit holomorphe dans la couronne (\mathcal{C}) définie par : $R' \leq |z - z_0| \leq R$
- γ une courbe fermée quelconque entourant z_0 et contenue dans la couronne (\mathcal{C}) .
- z un point \in couronne (\mathcal{C})

Alors : $f(z)$ est développable en série selon les puissances entières de $(z - z_0)$:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \text{ où } \forall n \in \mathbb{Z}, \quad a_n = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\gamma^+} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \quad (5.101)$$

5.5.2 Preuve

Notons Γ et Γ' les cercles délimitant la couronne \mathcal{C} , et ζ un point courant $\in (\Gamma + \Gamma')$ (Fig. 5.16).

La formule de Cauchy donne pour le domaine intérieur à \mathcal{C} :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\Gamma + \Gamma'} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)} d\zeta = \frac{1}{2i\pi} \left[\oint_{\Gamma^+} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)} d\zeta - \oint_{\Gamma'^+} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)} d\zeta \right] \quad (5.102)$$

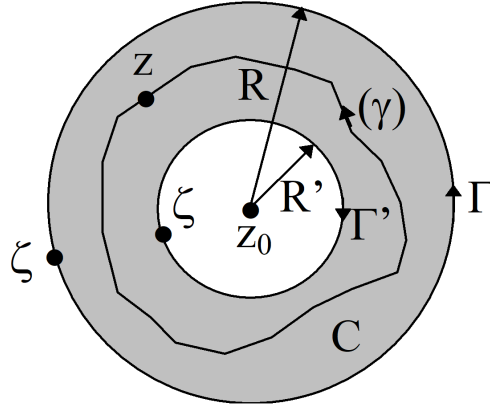


FIGURE 5.16 – Couronne d'intégration.

$$\text{sur } \Gamma : \left| \frac{z-z_0}{\zeta-z_0} \right| < 1 \implies \frac{1}{\zeta-z} = \frac{1}{\zeta-z_0} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}} \text{ CU}$$

$$\text{sur } \Gamma' : \left| \frac{\zeta-z_0}{z-z_0} \right| < 1 \implies -\frac{1}{\zeta-z} = \frac{1}{z-\zeta} = \frac{1}{z-z_0} \cdot \frac{1}{1-\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}} \text{ CU}$$

$$\text{Posons } n+1 = -p : -\frac{1}{\zeta-z} = \sum_{p=-1}^{-\infty} \frac{(z-z_0)^p}{(\zeta-z_0)^{p+1}}. \text{ Donc : } f(z) =$$

$$\frac{1}{2i\pi} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^n \oint_{\Gamma^+} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}} d\zeta + \sum_{p=-1}^{-\infty} (z-z_0)^p \oint_{\Gamma'^+} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{p+1}} d\zeta \right] \quad (5.103)$$

On peut poser : $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$ avec :

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\Gamma^+} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}} d\zeta \text{ si } n \geq 0 \quad (5.104)$$

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\Gamma'^+} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}} d\zeta \text{ si } n < 0 \quad (5.105)$$

Soit γ une courbe fermée entourant z_0 et contenue dans la couronne (\mathcal{C}). Le théorème de Cauchy appliqué à la fonction $\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}$ donne :

$$\text{sur } (\gamma + \Gamma) : \oint_{\Gamma^+} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}} d\zeta - \oint_{\gamma^+} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = 0 \quad (5.106)$$

$$\text{sur } (\Gamma' + \gamma) : \oint_{\gamma^+} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz - \oint_{\Gamma'^+} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}} d\zeta = 0 \quad (5.107)$$

On peut donc adopter une formulation unique pour les intégrales définissant a_n . [CQFD](#).

5.5.3 Cas d'un pôle d'ordre p

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^p} \quad (5.108)$$

où $g(z)$ est développable en série de Taylor : $g(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k(z - z_0)^k$
d'où : $f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k(z - z_0)^{k-p} = \sum_{n=-p}^{+\infty} b_{n+p}(z - z_0)^n$ avec $n = k - p$.
En posant $a_n = b_{n+p}$, on obtient :

$$f(z) = \sum_{n=-p}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n \quad (5.109)$$

Le développement est limité vers les $k < 0$: $a_n = 0$ pour $n < -p$.

5.5.4 Théorème des résidus

5.5.4.1 Résidu d'une fonction uniforme en un point singulier isolé

Hypothèse :

- $f(z)$ fonction uniforme
- z_0 un point singulier isolé de $f(z)$
- γ un contour simple fermé entourant z_0 .

On peut donc écrire le développement en série de Laurent :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n \text{ avec } a_n = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\gamma^+} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

On appelle résidu de $f(z)$ au point z_0 le coefficient a_{-1} du terme $\frac{1}{z - z_0}$ dans le développement de $f(z)$:

$$A(z_0) = a_{-1} = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\gamma^+} f(z) dz \quad (5.110)$$

5.5.4.2 Théorème des résidus

Hypothèses :

- $f(z)$ holomorphe, uniforme dans domaine (\mathcal{D}) sauf en un nombre fini n de points singuliers isolés z_j ($1 \leq j \leq n$)
- $f(z)$ continue sur la frontière (\mathcal{C})
- On définit (\mathcal{D}') en enlevant de (\mathcal{D}) les sous-domaines (\mathcal{D}_j) entourant les points singuliers :

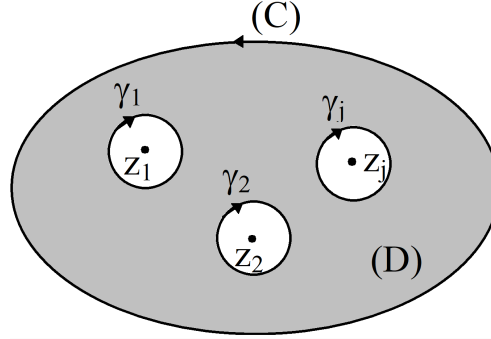


FIGURE 5.17 – Domaine excluant les singularités.

Ainsi $f(z)$ est holomorphe dans (\mathcal{D}') \implies on peut appliquer le théorème de Cauchy :

$$\oint_C f(z)dz + \sum_{j=1}^n \oint_{\gamma_j^-} f(z)dz = 0 \implies \oint_C f(z)dz = \sum_{j=1}^n \oint_{\gamma_j^+} f(z)dz = 2i\pi \sum_{j=1}^n A(z_j) \quad (5.111)$$

Donc [19] :

$$\oint_C f(z)dz = 2i\pi \sum_{j=1}^n A(z_j) \quad (5.112)$$

où z_j sont les points singuliers isolés $\in (\mathcal{D})$

5.5.4.3 Calcul de résidus

5.5.4.3.1 Cas d'un pôle simple

1^{re} méthode Soit z_0 un pôle simple (d'ordre $p = 1$). Le DSL s'écrit :

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + \dots$$

donc : $(z-z_0)f(z) = a_{-1} + (z-z_0)\phi(z)$ où $\phi(z)$ est un polynôme en $(z-z_0)$.

Donc :

$$A(z_0) = a_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0)f(z) \quad (5.113)$$

2^e méthode Si : $f(z) = \frac{n(z)}{d(z)}$ alors : $A(z_0) = \frac{n(z_0)}{d'(z_0)}$

Preuve : Si : $f(z) = \frac{n(z)}{d(z)}$ avec : $d(z) = (z-z_0)g(z)$

alors : $d'(z) = g(z) + (z-z_0)g'(z)$

Donc : $d'(z_0) = g(z_0)$, d'où :

$$A(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = \frac{n(z_0)}{g(z_0)} = \frac{n(z_0)}{d'(z_0)} \quad (5.114)$$

CQFD

5.5.4.3.2 Pôle multiple : Soit z_0 un pôle d'ordre p .

$$f(z) = \frac{a_{-p}}{(z-z_0)^p} + \dots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + \dots$$

$$\text{donc : } (z - z_0)^p f(z) = a_{-p} + \dots + a_{-1}(z - z_0)^{p-1} + \dots$$

$$\frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}} [(z - z_0)^p f(z)] = (p-1)!a_{-1} + (z - z_0)\phi(z)$$

$$\text{donc : } \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}} [(z - z_0)^p f(z)] = (p-1)!a_{-1}$$

D'où :

$$A(z_0) = a_{-1} = \frac{1}{(p-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}} [(z - z_0)^p f(z)] \quad (5.115)$$

5.5.4.3.3 Cas d'un point singulier essentiel : C'est un point où ni $f(z)$ ni $1/f(z)$ ne sont développables en série entière. Pour calculer le résidu, on écrit le DSL pour en extraire le coefficient a_{-1} .

Exemple : $f(z) = \exp\left(\frac{1}{z}\right)$ en $z_0 = 0$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{z}\right)^k = \sum_{n=-\infty}^0 \frac{1}{|n|!} z^n \implies a_{-1} = \frac{1}{1!} = 1 \quad (5.116)$$

Si la fonction étudiée est une fonction entière (rayon de convergence infini), le DSL représente le DSE de la fonction au voisinage du point singulier essentiel.

5.5.4.3.4 Résidu au voisinage de l'infini : Soit :

— $f(z)$ holomorphe à l'extérieur d'une courbe fermée Γ sauf peut-être à l'infini

— (\mathcal{D}) domaine extérieur à (Γ)

On appelle résidu à l'infini :

$$A(\infty) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\Gamma^-} f(z) dz \quad (5.117)$$

Propriété :

On pose : $u = \frac{1}{z}$ et : $\phi(u) = f(z = \frac{1}{u})$

$\phi(u)$ est holomorphe pour $|u| < 1/R$ sauf peut-être en 0.

On a le DSL :

$$\phi(u) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} b_k u^k = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} b_k \frac{1}{z^k} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n z^n \quad (\text{où } n = -k \text{ et } a_n = b_{-n} = b_k) \quad (5.118)$$

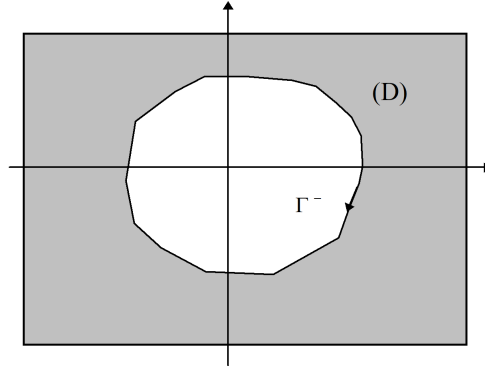


FIGURE 5.18 – Contour d'intégration donnant le résidu à l'infini.

$$\begin{aligned}
 b_k &= \frac{1}{2i\pi} \oint_{\gamma^+} \frac{\phi(u)}{u^{k+1}} du = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\Gamma^-} f(z) z^{k+1} \left(\frac{-dz}{z^2} \right) \\
 &= -\frac{1}{2i\pi} \oint_{\Gamma^-} f(z) z^{k-1} dz = -\frac{1}{2i\pi} \oint_{\Gamma^-} \frac{f(z)}{z^{1-k}} dz = a_n \quad (5.119)
 \end{aligned}$$

$$a_{-1} = b_1 = -\frac{1}{2i\pi} \oint_{\Gamma^-} f(z) dz = -A(\infty) \quad (5.120)$$

Donc : $A(\infty) = -a_{-1}$

C'est le coefficient du terme en $1/z$ changé de signe dans le développement de $f(z)$ au voisinage de l'infini. On peut donc étendre le théorème des résidus à un domaine (\mathcal{D}) contenant l'infini.

5.5.4.4 Extension du théorème des résidus

5.5.4.4.1 Cas d'une fonction holomorphe dans tout le plan complexe, sauf en un nombre fini de points singuliers isolés z_j : On a :

$$\oint_{\Gamma^+} f(z) dz = 2i\pi \sum_{j=1}^n A(z_j) = -\oint_{\Gamma^-} f(z) dz = -2i\pi A(\infty) \quad (5.121)$$

Donc, si l'on inclut le point singulier à l'infini :

$$A(\infty) + \sum_{j=1}^n A(z_j) = 0 \quad (5.122)$$

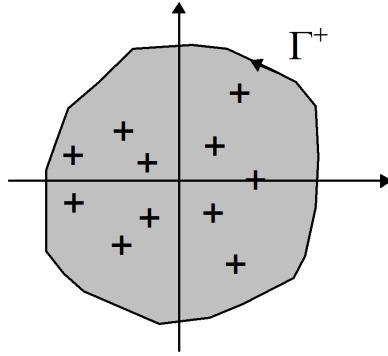


FIGURE 5.19 – Contour d'intégration donnant la somme des résidus à distance finie.

5.5.4.4.2 Cas d'une fraction rationnelle : $f(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$ avec $\deg(N) = n$; $\deg(D) = d$; $d > n + 1 \Leftrightarrow \nu = d - n > 1$

On a : $f(z) \cong \frac{1}{z^\nu}$ et $\int f(z)dz \cong \frac{1}{z^{\nu-1}}$

Donc :

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \int f(z)dz = 0 \implies A(\infty) = 0 \quad (5.123)$$

Donc la somme des résidus relatifs aux pôles situés à distance finie est nulle :

$$d > n + 1 \implies \sum_{j=1}^n A(z_j) = 0 \quad (5.124)$$

5.6 Application au calcul d'intégrales finies

5.6.1 Théorème 1

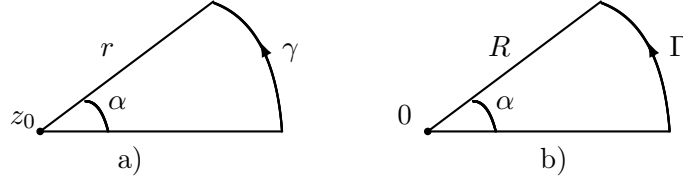
Soit :

- $f(z)$ continue au $\mathcal{V}(z_0)$ sauf en z_0 , telle que : $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = \ell$
- (γ) un arc de cercle de centre z_0 , de rayon $r \rightarrow 0$, de mesure angulaire α (Fig. 5.20a).

Alors :

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma^+} f(z)dz = i\alpha\ell \quad (5.125)$$

Application : cas où $f(z)$ est méromorphe, avec un pôle simple z_0 ; alors : $A(z_0) = \ell$.

FIGURE 5.20 – Intégration autour : a) d'un point z_0 ; b) de l'infini.

5.6.2 Théorème 2

Hypothèses :

- $f(z)$ continue pour $|z| > R$, telle que : $\lim_{|z| \rightarrow \infty} z f(z) = \ell$
- (Γ) un arc de cercle de centre 0, de rayon $R \rightarrow \infty$, de mesure angulaire α (Fig. 5.20b).

Alors :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma+} f(z) dz = i\alpha\ell \quad (5.126)$$

5.6.3 Lemme 1 de Jordan

Hypothèse :

- $f(z)$ continue au $\mathcal{V}(z_0)$ sauf en z_0 .
- (γ) un arc de cercle de centre z_0 , de rayon $r \rightarrow 0$, de mesure angulaire α .

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |(z - z_0)f(z)| = 0 \implies \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma+} f(z) dz = 0 \quad (5.127)$$

5.6.4 Lemme 2 de Jordan

Hypothèse :

- $f(z)$ continue pour $|z| > R$
- (Γ) un arc de cercle de centre 0, de rayon $R \rightarrow \infty$, de mesure angulaire α .

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} |z f(z)| = 0 \implies \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma+} f(z) dz = 0 \quad (5.128)$$

5.6.5 Calcul d'intégrales définies (fonctions uniformes)

5.6.5.1 Fraction rationnelle $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$

$\deg(P) = p$; $\deg(Q) = q$ tel que $q > p + 1$.

On suppose que $Q(x)$ ne s'annule pas sur l'axe réel.

On considère alors : $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$; pôles complexes z_j ; résidu à l'infini nul.

On intègre sur le contour de la Fig. 5.21.

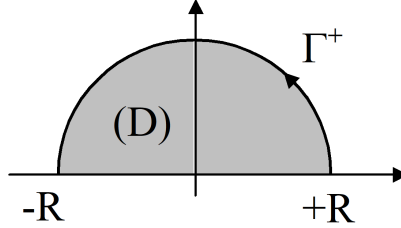


FIGURE 5.21 – Contour d'intégration pour fraction rationnelle.

$$\int_{-R}^{+R} f(z)dz + \int_{\Gamma^+} f(z)dz = 2i\pi \sum_{z_j \in (\mathcal{D})} A(z_j) \quad (5.129)$$

Or : $\lim_{|z| \rightarrow \infty} z f(z) = 0 \implies \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma^+} f(z)dz = 0 \implies$

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2i\pi \sum_{z_j(y>0)} A(z_j) \quad (5.130)$$

5.6.5.2 Intégrale de fonction trigonométrique

Soit une intégrale de la forme : $I = \int_0^{2\pi} F(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$.

On pose : $z = e^{i\theta}$; on obtient une fonction $F(z)$.

Notons γ^+ le cercle trigonométrique.

On a : $dz = ie^{i\theta} d\theta = iz d\theta$

d'où : $I = \oint_{\gamma^+} F(z) \frac{dz}{iz} = \frac{1}{i} \oint_{\gamma^+} \frac{F(z)}{z} dz$

$$I = 2\pi \sum_{z_j \in \text{intérieur } \gamma} A(z_j) \quad (5.131)$$

où les $A(z_j)$ sont les résidus de $\frac{F(z)}{z}$.

5.6.5.3 Intégrale renfermant une exponentielle complexe

Soit l'intégrale : $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{imx} \frac{N(x)}{D(x)} dx$, avec $\deg(N) = n$; $\deg(D) = d$.

On suppose :

- $m > 0$
- $d > n$

— $D(x) \neq 0$ sur l'axe réel.

On considère : $f(z) = e^{imz} \frac{N(z)}{D(z)}$ et la courbe fermée (\mathcal{C}) constituée de l'axe réel $[-R; +R]$ et du demi-cercle Γ défini par : $|z| = R$ et $y > 0$ telle que tous les pôles de $N(z)/D(z)$ avec $y > 0$ soient contenus dans Γ ($R \rightarrow \infty$). Le théorème des résidus donne :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{imx} \frac{N(x)}{D(x)} dx = 2i\pi \sum_{z_j(y>0)} A(z_j) \quad (5.132)$$

Pour $m < 0$, on obtient avec le contour Γ'^+ :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{imx} \frac{N(x)}{D(x)} dx = -2i\pi \sum_{z_j(y<0)} A(z_j) \quad (5.133)$$

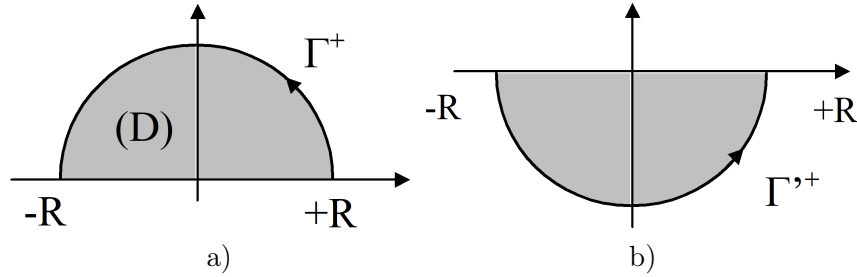


FIGURE 5.22 – Contour d'intégration pour : a) $m > 0$; b) $m < 0$.

5.6.5.4 Fonction exponentielle $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{imx} g(e^{kx}) dx$

On pose : $f(z) = g(e^{kz})e^{imz}$ et on considère le contour de la Fig. 5.23 quand $R \rightarrow \infty$.

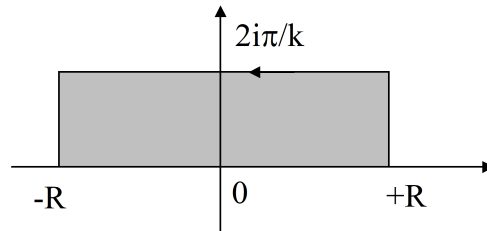


FIGURE 5.23 – Contour d'intégration rectangulaire.

Si : $\lim_{R \rightarrow \infty} |f(z)| = 0$ sur les segments latéraux, alors :

$$I = \frac{2i\pi}{1 - \exp\left(-\frac{2m\pi}{k}\right)} \sum_{z_j \in [0 \leq y \leq \frac{2\pi}{k}]} A(z_j) \quad (5.134)$$

5.6.6 Intégrales de fonctions multiformes

5.6.6.1 Précaution et conseil

Le théorème des résidus ne s'applique qu'à un domaine où la fonction est uniforme. Il faut donc uniformiser la fonction, c'est-à-dire contourner les points critiques avec des coupures et choisir une détermination. A l'intérieur du domaine, on doit suivre par continuité la détermination de la fonction.

Conseil : pour calculer les résidus $A(z_j)$, toujours exprimer les z_j en module et argument.

5.6.6.2 Fonction Racine $I = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$

avec :

- $q > p$
- $0 < \alpha < 1, \alpha \in \mathbb{R}$
- $Q(x) \neq 0 \quad \forall x \geq 0$.

La fonction $z^{\alpha-1}$ est multiforme. Ses points critiques sont : $z = 0$ et $z = \infty$. On définit la coupure de la Fig. 5.24 et on prend la détermination principale : $\theta \in [0; 2\pi]$

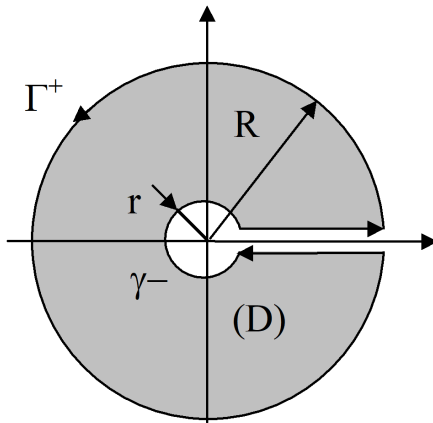


FIGURE 5.24 – Domaine avec coupure pour la fonction racine ou pour la fonction logarithme.

Le contour comprend :

- le segment $[r, R]$
- le cercle $\Gamma^+ (0, R)$
- le segment $[R, r]$
- le cercle $\gamma^- (0, r)$.

A l'intérieur de ce contour, la fonction : $f(z) = z^{\alpha-1} \frac{P(z)}{Q(z)}$ est uniforme.

Sur le segment $[R, r]$, la détermination de $z^{\alpha-1}$ n'est plus réelle :
 $z^{\alpha-1} = x^{\alpha-1}$ est devenu : $x^{\alpha-1} e^{2i\pi(\alpha-1)}$

$$\oint_C f(z)dz = \int_r^R x^{\alpha-1} \frac{P(x)}{Q(x)} dx + \int_{\Gamma^+} f(z)dz + \int_R^r f(z)dz + \int_{\gamma^-} f(z)dz \quad (5.135)$$

En appliquant les lemmes 1 et 2 et le théorème des résidus, on obtient :

$$\oint_C f(z)dz = I + 0 + \int_R^r f(z)dz + 0 = 2i\pi \sum_{z_j \in (\mathcal{D})} A(z_j) \quad (5.136)$$

Or :

$$\int_R^r f(z)dz = - \int_r^R x^{\alpha-1} e^{2i\pi\alpha} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = -e^{2i\pi\alpha} I \quad (5.137)$$

$$I = \frac{2i\pi}{1 - e^{2i\pi\alpha}} \sum_{z_j \in (\mathcal{D})} A(z_j) \quad (5.138)$$

5.6.6.3 Racine et puissance non entière

$$I = \int_a^b \frac{P(z)}{Q(z)} \frac{1}{(z-a)^\alpha (b-z)^{1-\alpha}} dz$$

$\deg(P) = p$; $\deg(Q) = q$; a et b sont des complexes ; $0 < \alpha < 1$.

$f(z)$ est une fonction multiforme et admet pour points critiques a et b .

L'infini est régulier. On intègre donc sur le contour de la Fig. 5.25, excluant les points critiques du domaine d'intégration (on suppose que $Q(z)$ ne s'annule pas sur le segment (a, b)) :

On obtient en appliquant le théorème des résidus et le lemme 1 :

$$I = \int_a^b \frac{P(z)}{Q(z)} \frac{1}{(z-a)^\alpha (b-z)^{1-\alpha}} dz = \frac{2i\pi}{1 - e^{-i2\pi\alpha}} \sum_{z_j \in \det[0; 2\pi]} A(z_j) \quad (5.139)$$

sans oublier dans la somme des résidus la contribution du point à l'infini. On est donc amené à calculer le résidu à l'infini. Il faut alors transformer $(b-z)$ en $(-1).(z-b)$ en explicitant le terme (-1) sous la forme d'un argument en tenant compte par continuité de la détermination choisie. Pour la détermination principale, on a : $-1 = e^{-i\pi}$

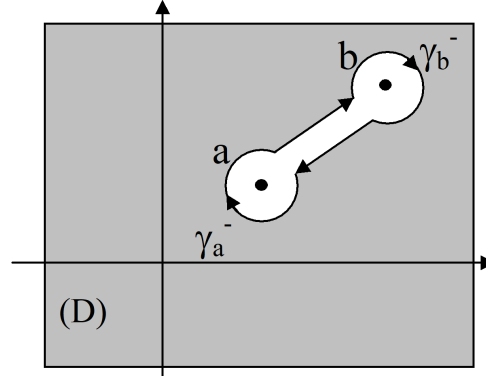


FIGURE 5.25 – Coupure excluant les 2 points critiques.

5.6.6.4 Fonction logarithme

$$I_p = \int_0^{+\infty} \text{Log}^p(x) \frac{N(x)}{D(x)} dx$$

où $p \in \mathbb{N}^*$; $N(x)$ et $D(x)$ sont des polynômes de degrés : $\deg(N) = n$; $\deg(D) = d$.

L'intégrale converge si : $d \geq n + 2$ et $D(x) \neq 0$ sur \mathbb{R}^+

$f(z)$ est multiforme avec pour points critiques 0 et l'infini. On applique le théorème des résidus sur le contour de la Fig. 5.24.

On obtient une relation de récurrence entre les intégrales I_p :

$$\sum_{q=1}^p C_p^q (2i\pi)^{q-1} I_{p-q} = - \sum_{z_j \in \det[0; 2\pi]} A(z_j) \quad (5.140)$$

où :

$$C_p^q = \frac{p!}{q!(p-q)!} \quad (5.141)$$

Chapitre 6

Transformée de Laplace

Préambule

La transformée de Laplace a un intérêt applicatif en physique pour deux raisons essentielles : elle permet d’algébriser un problème différentiel, car la dérivation d’une fonction se traduit par une simple multiplication par la variable symbolique de Laplace. Ceci est pratique pour résoudre des équations différentielles [7]. D’autre part, elle transforme un produit de convolution en un simple produit algébrique, ce qui est utile pour trouver la réponse d’un système linéaire quel qu’il soit (concept de boîte noire).

6.1 Intégrale de Laplace

6.1.1 Définition

Soit $f(t)$ une fonction causale de la variable réelle t (*i.e.* $f(t) = 0$ pour $t < 0$). On lui fait correspondre une fonction $\Phi(p)$ de la variable symbolique $p \in \mathbb{C}$:

$$\Phi(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt \quad (6.1)$$

$\Phi(p)$ est l’image de $f(t)$. On note : $\Phi(p) \subset f(t)$.

$\Phi(p)$ s’appelle la **Transformée de Laplace (TL)** de $f(t)$.

$f(t)$ est l’original de $\Phi(p)$.

Calcul symbolique : un problème de détermination d’une fonction $f(t)$ peut se traiter par la détermination de $\Phi(p)$, souvent plus simple.

6.1.2 Abscisse de convergence

Théorème : Soit $I = \Phi(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$. Si l'intégrale I converge pour une valeur donnée $p_0 = x_0 + iy_0$, alors elle converge pour toute valeur de $p = x + iy$ telle que $\Re(p) = x > x_0$.

x_0 est l'abscisse de convergence. La région de convergence est alors un demi-plan situé à droite de la droite $x = x_0$ (Fig. 6.1).

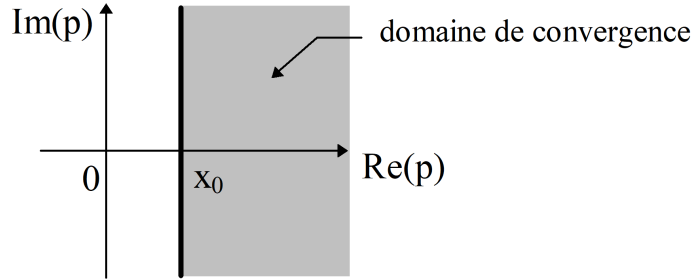


FIGURE 6.1 – Domaine de convergence.

Démonstration

On pose : $\Psi(t) = \int_0^t e^{-p_0\tau} f(\tau) d\tau$.

N.B. : $\Psi(0) = 0$

Si I converge pour p_0 , alors : $\exists M \mid \forall t : |\Psi(t)| = \left| \int_0^t e^{-p_0\tau} f(\tau) d\tau \right| < M$

D'autre part : $\frac{d\Psi}{dt} = e^{-p_0t} f(t) \Rightarrow$

$$\Phi(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-(p-p_0)t} f(t) e^{-p_0t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(p-p_0)t} \frac{d\Psi}{dt} dt$$

$$\Phi(p) = \underbrace{\left[e^{-(p-p_0)t} \Psi(t) \right]_0^{\infty}}_{=0 \text{ si } x > x_0} + (p-p_0) \int_0^{\infty} e^{-(p-p_0)t} \Psi(t) dt$$

$$\phi(p) = 0 + (p-p_0) \int_0^{\infty} e^{-(p-p_0)t} \psi(t) dt$$

$$|\phi(p)| = |p-p_0| \left| \int_0^{\infty} e^{-(p-p_0)t} \psi(t) dt \right| \leq |p-p_0| M \left| \int_0^{\infty} e^{-(p-p_0)t} dt \right|$$

$$|\phi(p)| \leq |p-p_0| M \int_0^{\infty} e^{-(x-x_0)t} dt \text{ qui converge si } x > x_0$$

$$|\phi(p)| \leq |p-p_0| M \left[\frac{-e^{-(x-x_0)t}}{x-x_0} \right]_0^{\infty} = \frac{|p-p_0|M}{x-x_0}$$

donc : $|\Phi(p)|$ converge pour $x > x_0$.

6.1.3 Quelques cas particuliers

6.1.3.1 Fonction unité de Heaviside $\mathcal{U}(t)$ et $\mathcal{U}(t - t_0)$

La fonction unité $\mathcal{U}(t)$ est parfois aussi notée $H(t)$ (échelon unité de Heaviside).

$$\mathcal{U}(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ 1 & \text{pour } t > 0 \end{cases} \quad \text{cf. (Fig. 6.2.a)}$$

$$\phi(p) = \int_0^\infty e^{-pt} dt = \left[\frac{-e^{-pt}}{p} \right]_0^\infty = \frac{1}{p} \text{ si } \Re(p) > 0$$

$$\mathcal{U}(t) \supset \frac{1}{p} \quad \text{avec } x_c = 0$$

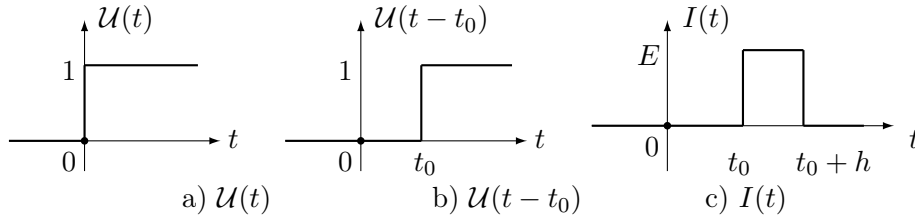


FIGURE 6.2 – a) fonction de Heaviside; b) échelon retardé; c) impulsion.

$$\mathcal{U}(t - t_0) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < t_0 \\ 1 & \text{pour } t > t_0 \end{cases} \quad \text{cf. (Fig. 6.2.b)}$$

$$\phi(p) = \int_{t_0}^\infty e^{-pt} dt = \left[\frac{-e^{-pt}}{p} \right]_{t_0}^\infty$$

$$\mathcal{U}(t - t_0) \supset \frac{e^{-pt_0}}{p} \quad \text{avec } x_c = 0$$

6.1.3.2 Impulsion

$$I(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } -\infty < t < t_0 \\ E & \text{pour } t_0 < t < t_0 + h \\ 0 & \text{pour } t_0 + h < t < \infty \end{cases} \quad \text{cf. (Fig. 6.2.c)}$$

$$I(t) = E [\mathcal{U}(t - t_0) - \mathcal{U}(t - (t_0 + h))]$$

$$\phi(p) = \int_{t_0}^{t_0+h} E e^{-pt} dt = \frac{E}{p} e^{-pt_0} (1 - e^{-ph})$$

$$I(t) \supset_{x_c = -\infty} \frac{E}{p} e^{-pt_0} [1 - e^{-ph}]$$

§13.40

6.1.3.3 Impulsion de Dirac

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ 1/\varepsilon & \text{pour } 0 < t < \varepsilon \\ 0 & \text{pour } t > \varepsilon \end{cases} \quad \delta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} [\mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t - \varepsilon)]$$

$$\phi(p) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon p} [1 - e^{-p\varepsilon}] = 1 \Rightarrow \delta(t) \underset{x_c = -\infty}{\supset} 1$$

$$\delta(t - a) \underset{x_c = -\infty}{\supset} e^{-pa}$$

6.1.3.4 Fonction puissance $f(t) = t^\nu$

— définition d'Euler de la fonction factorielle :

$$\begin{aligned} \Gamma(x) &= \int_0^\infty u^{x-1} e^{-u} du & \mathbf{x} > 0 \\ \Gamma(n+1) &= n! \end{aligned}$$

— $\nu = n$ entier > -1 ; et p variable réelle > 0 §13.67

$$\phi(p) = \int_0^\infty t^n e^{-pt} dt \underset{u=pt}{=} \frac{1}{p^{n+1}} \int_0^\infty u^n e^{-u} du = \frac{n!}{p^{n+1}} \underset{p=x>0}{\subset} t^n$$

— généralisation : pour $\nu \neq$ entier ; et p complexe

$$t^\nu \supset \frac{\Gamma(\nu+1)}{p^{\nu+1}} \quad x_c = 0$$

— cas particuliers :

$$\begin{aligned} \nu &= -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{t}} &\supset \sqrt{\frac{\pi}{p}} \\ \nu &= \frac{1}{2} & \sqrt{t} &\supset \frac{1}{2p} \sqrt{\frac{\pi}{p}} \end{aligned}$$

6.1.3.5 Fonction exponentielle $f(t) = e^{at}$ et $f(t) = t^n e^{at}$

$$\phi(p) = \int_0^\infty e^{-(p-a)t} dt = \frac{1}{p-a} \quad \text{donc : } \boxed{e^{at} \underset{x_c = \Re(a)}{\supset} \frac{1}{p-a}}$$

$$t^n e^{at} \underset{x_c = \Re(a)}{\supset} \frac{\Gamma(n+1)}{(p-a)^{n+1}}$$

§13.48

6.2 Règles de Heaviside

6.2.1 Linéarité de la TL

Les propriétés de linéarité de la TL sont dues aux propriétés de linéarité de l'intégrale. Soient deux scalaires λ et μ , et deux fonctions $f_1(t)$ et $f_2(t)$. Alors :

$$\begin{cases} \phi_1(p) & \subset & f_1(t) \\ \phi_2(p) & \subset & f_2(t) \end{cases} \Rightarrow \lambda \cdot \phi_1(p) + \mu \cdot \phi_2(p) \subset \lambda \cdot f_1(t) + \mu \cdot f_2(t)$$

Une combinaison linéaire de fonctions a donc pour image la combinaison linéaire des transformées : $\lambda \cdot f_1(t) + \mu \cdot f_2(t) \supset \lambda \cdot \phi_1(p) + \mu \cdot \phi_2(p)$ §13.40.

6.2.2 Première règle de Heaviside

Soit $f(t)$ définie par son développement en série entière :

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}$$

Notons :

$$\phi_n(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \frac{a_n t^n}{n!} dt = \frac{a_n}{n!} TL[t^n] = \frac{a_n}{p^{n+1}} \quad ; \quad x_c = 0 \quad (6.2)$$

donc par linéarité (et convergence uniforme) :

$$\phi(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{p^{n+1}} \subset f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n t^n}{n!}$$

La série $\phi(p)$ converge d'après le critère de Cauchy si : $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{a_n}{p^{n+1}} \right|} < 1$

$$\text{c'est-à-dire si : } \begin{cases} |p| & > & \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \\ \Re(p) & > & 0 \quad x_c = 0 \end{cases}$$

6.2.3 Deuxième règle de Heaviside

Soit $\phi(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$ avec $\deg D > \deg N$

Soient a_i les pôles de $\phi(p)$ d'ordre de multiplicité λ_i .

On décompose $\phi(p)$ en éléments simples :

$$\phi(p) = \sum_i \left[\sum_{j=1}^{\lambda_i} \frac{A_{ij}}{(p-a_i)^j} \right]. \text{ On en déduit l'original } f(t) :$$

$$f(t) = \sum_i e^{a_i t} \left[\sum_{j=1}^{\lambda_i} \frac{A_{ij}}{(j-1)!} t^{j-1} \right] \supset \phi(p) = \sum_i \left[\sum_{j=1}^{\lambda_i} \frac{A_{ij}}{(p-a_i)^j} \right]$$

$$x_c = \max [\Re(a_i)]$$

6.2.4 Applications

6.2.4.1 Recherche de transformée

Soit $\omega \in \mathbb{R}$: $\cos \omega t = \frac{1}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})$.

Comme $e^{at} \supset_{x_c=\Re(a)} \frac{1}{p-a}$, on a :

$$\begin{aligned} \cos \omega t &\supset_{x_0=0} \frac{p}{p^2 + \omega^2} & \sin \omega t &\supset_{x_0=0} \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \\ \cosh \omega t &\supset_{x_0=|\omega|} \frac{p}{p^2 - \omega^2} & \sinh \omega t &\supset_{x_0=|\omega|} \frac{\omega}{p^2 - \omega^2} \end{aligned}$$

6.2.4.2 Recherche de l'original

- Considérons : $\phi(p) = \text{Arctg} \left(\frac{\omega}{p} \right)$

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dp} &= \frac{1}{1 + \frac{\omega^2}{p^2}} \cdot \left(-\frac{\omega}{p^2} \right) \Big|_{|p| > |\omega|} = -\frac{\omega}{p^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{\omega^2}{p^2} \right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\omega^{2k+1}}{p^{2k+2}} \end{aligned} \quad (6.3)$$

On intègre terme à terme en choisissant la constante d'intégration nulle

$$\phi(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \cdot \left(\frac{\omega}{p} \right)^{2k+1}$$

$$\left(\text{cf. on retrouve le DST de } \text{Arctg } z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} z^{2k+1} \right)$$

On applique la première règle de Heaviside :

$$\begin{aligned} \phi(p) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \omega^{2k+1}}{2k+1} \cdot \frac{1}{p^{2k+1}} \subset \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \omega^{2k+1}}{(2k+1)} \frac{t^{2k}}{(2k)!} \\ \phi(p) &= \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\omega t)^{2k+1}}{(2k+1)!} \end{aligned} \quad (6.4)$$

$$\text{donc } \boxed{\operatorname{Arctg} \frac{\omega}{p} \subset \frac{\sin \omega t}{t}}$$

- On considère : $\phi(p) = \operatorname{Log} \left(1 + \frac{\omega^2}{p^2} \right)$

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dp} &= \frac{1}{1 + \frac{\omega^2}{p^2}} \cdot \left(\frac{-2\omega^2}{p^3} \right) \quad |p| > |\omega| = -\frac{2\omega^2}{p^3} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{\omega^2}{p^2} \right)^k \\ &= -2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\omega^{2k+2}}{p^{2k+3}} \end{aligned}$$

On intègre terme à terme

$$\begin{aligned} \phi(p) &= -2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+2} \left(\frac{\omega}{p} \right)^{2k+2} \\ &\quad \left(\text{cf. } \operatorname{Log}(1+z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} z^{k+1} \quad \text{DST pour } |z| < 1 \right) \\ \phi(p) &\subset -2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+2} \frac{\omega^{2k+2}}{(2k+1)!} t^{2k+1} = \frac{2}{t} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\omega t)^{2k+2}}{(2k+2)!} \\ \phi(p) &\subset \frac{2}{t} \left[1 - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\omega t)^{2k}}{(2k)!} \right] = \frac{2}{t} [1 - \cos \omega t] \\ &\quad \boxed{\operatorname{Log} \left(1 + \frac{\omega^2}{p^2} \right) \subset \frac{2}{t} (1 - \cos \omega t)} \end{aligned}$$

§13.42

6.3 Inversion de la transformée de Laplace

6.3.1 Définition de $\mathcal{U}(t)$ par une intégrale de Bromwich-Wagner

$$\mathcal{U}(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} \frac{e^{pt}}{p} dp$$

6.3.2 Intégrale de Mellin-Fourier

$$f(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} e^{pt} \phi(p) dp$$

L'intégrale de Mellin-Fourier permet, quand on connaît l'image $\phi(p)$, de remonter à l'original $f(t)$.

6.3.3 Calcul de l'intégrale de Mellin-Fourier

6.3.3.1 Contour de Bromwich - Lemme de Jordan généralisé

6.3.3.1.1 Contour de Bromwich d'une fonction $\phi(z)$: C'est une droite (Fig. 6.3) :

- joignant le point $C - i\infty$ au point $C + i\infty$
- laissant à gauche tous les points singuliers de $\phi(z)$

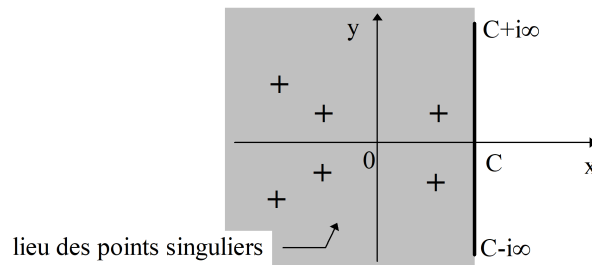


FIGURE 6.3 – Contour de Bromwich.

6.3.3.1.2 Intégrale de Bromwich-Wagner : Soit $\phi(z)$ une fonction de z dont tous les points singuliers sont à gauche du contour de Bromwich. L'intégrale de Bromwich-Wagner est du type :

$$J(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} e^{tz} \phi(z) dz$$

6.3.3.1.3 Lemme de Jordan généralisé : Soit une fonction $\phi(z)$:

- holomorphe (définie, analytique et uniforme) dans le demi-plan $x < 0$ sauf en un nombre **fini** de pôles
- tendant uniformément vers zéro lorsque $|z| \rightarrow \infty$
- soit t réel > 0
- soit C la demi-circonférence $(0, R)$ située à gauche de l'axe imaginaire (Fig. 6.4.a).

Alors :

$$\boxed{\int_{C^+} e^{tz} \phi(z) dz \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0}$$

6.3.3.1.4 Contour équivalent si $\phi(z)$ satisfait le lemme :

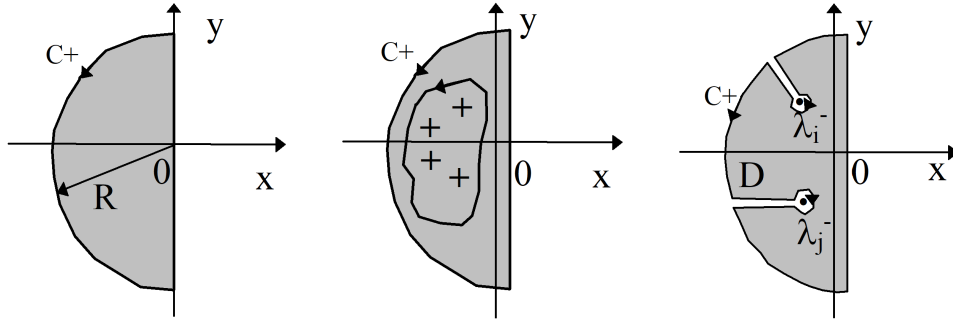


FIGURE 6.4 – De gauche à droite : contours a) , b) et c).

- Les singularités ne sont **que des pôles** : contour équivalent = toute courbe fermée (γ) sans point double enfermant les pôles (Fig. 6.4.b).

Notons $A(z_j)$ les résidus aux pôles z_j :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} e^{tz} \phi(z) dz = \sum_{z_j} A(z_j) = \frac{1}{2i\pi} \int_{(\gamma+)} e^{tz} \phi(z) dz$$

- S'il existe **des points critiques (fonction multiforme)** : on exclut du domaine les points critiques (Fig. 6.4.c).

$$\int_{C-i\infty}^{C+i\infty} e^{tz} \phi(z) dz + \sum_j \int_{\lambda_j^-} e^{tz} \phi(z) dz = 2i\pi \sum_{z_j \in D} A(z_j)$$

6.3.3.2 Principe de calcul

L'intégrale de Mellin-Fourier se calcule par la méthode des résidus. L'abscisse C est choisie de manière à laisser à gauche du contour de Bromwich tous les points singuliers de $\phi(p)$.

On complète le plus souvent le chemin d'intégration $(C - i\infty; C + i\infty)$ par une demi-circonférence $\Gamma^+(O, R \rightarrow \infty)$ tracée du côté des $x < 0$ en ajoutant les coupures nécessaires au niveau des points critiques si la fonction $\phi(p)$ est multiforme.

Si le lemme de Jordan est satisfait, l'intégrale sur Γ^+ est nulle et on applique le théorème des résidus :

$$f(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} e^{pt} \phi(p) dp = \sum_{z_j} A(z_j) + \underbrace{\frac{1}{2i\pi} \sum_j \int_{\lambda_j^+} e^{tz} \phi(z) dz}_{\text{éventuellement si } f \text{ est multiforme}}$$

$A(z_j)$: résidus relatifs à $e^{pt}\phi(p)$

6.3.3.3 Exemple d'une fonction uniforme

$$\text{Soit } \phi(p) = \frac{1}{(p+a)^{n+1}} \text{ avec } \begin{cases} n \in \mathbb{N}^+ \\ a \in \mathbb{C} \end{cases}$$

$$f(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} \frac{e^{pt}}{(p+a)^{n+1}} dp = \frac{e^{-at}}{2i\pi} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} \frac{e^{(p+a)t}}{(p+a)^{n+1}} dp$$

$$\Psi(p) = \frac{e^{(p+a)t}}{(p+a)^{n+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (p+a)^{k-n-1} \leftrightarrow \text{DSE de } \psi(p) \text{ au } \mathcal{V}(-a)$$

$$f(t) = \frac{e^{-at}}{2i\pi} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} \psi(p) dp = e^{-at} A(-a) \quad \begin{cases} \text{car le lemme de Jordan} \\ \text{est satisfait par } \phi(p); \\ \text{Un point singulier } -a \end{cases}$$

$$A(-a) = a_{-1} = \frac{t^n}{n!} = \text{Res } [\psi(p)]_{-a}$$

donc $\boxed{\frac{1}{(p+a)^{n+1}} \subset \frac{t^n}{n!} e^{-at}}$

6.4 Règles opératoires du calcul symbolique

En plus de la propriété essentielle de linéarité, énoncée au paragraphe 6.2.1, la transformée de Laplace suit plusieurs règles opératoires, très pratiques à utiliser par l'électronicien non mathématicien, pour éviter le calcul intégral direct.

6.4.1 Dérivation et intégration par rapport à un paramètre

$$f(t, \alpha) \supset \phi(p, \alpha) \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial}{\partial \alpha} \phi(p, \alpha) \subset \frac{\partial}{\partial \alpha} f(t, \alpha) \\ \int_a^b \phi(p, \alpha) d\alpha \subset \int_a^b f(t, \alpha) d\alpha \end{cases}$$

$$\text{Exemple : } \frac{\partial}{\partial a} (e^{at}) = t e^{at} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{1}{p-a} \right) = \frac{1}{(p-a)^2} \supset t e^{at}$$

$$\int_a^b e^{\alpha t} d\alpha = \frac{e^{bt} - e^{at}}{t} \supset \int_a^b \frac{d\alpha}{p-\alpha} = \text{Log} \left(\frac{p-a}{p-b} \right)$$

6.4.2 Changement d'échelle

$$\text{Soit } k \in \mathbb{R}^+ : \quad \phi(p) \underset{x_c}{\subset} f(t) \Rightarrow k \phi(kp) \underset{\frac{x_c}{k}}{\subset} f\left(\frac{t}{k}\right)$$

6.4.3 Translation de la variable concrète t et symbolique p

$$\phi(p) \underset{x_c}{\subset} f(t) \Rightarrow \begin{cases} e^{\pm pa} \phi(p) \underset{x_c}{\subset} f(t \pm a) \cdot H(t) \\ \phi(p+a) \underset{x_c - \Re(a)}{\subset} e^{-at} f(t) \end{cases}$$

$$\text{Exemple : } \frac{p}{p^2+1} \subset \cos t \Rightarrow \frac{p+1}{p^2+2p+2} \subset e^{-t} \cos t$$

§13.88

6.4.4 Théorème du produit de Borel (convolution)

$$\text{Soit } \begin{matrix} \phi_1(p) \subset f_1(t) \\ \phi_2(p) \subset f_2(t) \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} \phi_1(p) \phi_2(p) &= \int_0^\infty e^{-p\theta} f_1(\theta) \phi_2(p) d\theta \subset \int_0^\infty f_1(\theta) f_2(t-\theta) H(t-\theta) d\theta \\ &= \int_0^t f_1(\theta) f_2(t-\theta) d\theta \text{ car } H(t-\theta) = 0 \text{ pour } \theta > t \end{aligned}$$

On a un rôle symétrique de f_1 et f_2 donc :

$$\phi_1(p) \phi_2(p) \subset f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\theta) f_2(t-\theta) d\theta$$

$$\text{Exemple : } \frac{1}{(p-a)(p-b)} \subset \frac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}$$

6.4.5 Dérivation et intégration par rapport à t

$$\begin{aligned} f(t) \supset \phi(p) &\Rightarrow \frac{df}{dt} \supset \int_0^\infty e^{-pt} \frac{df}{dt} dt = [e^{-pt} f(t)]_0^\infty + p \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt \\ \frac{df}{dt} &\supset p \phi(p) - f(0^+) \end{aligned}$$

$$\text{Généralisation : } f^{(n)}(t) \supset p^n \phi(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{n-1-k} f^{(k)}(0)$$

Intégration :

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \supset \frac{\phi(p)}{p}$$

6.4.6 Théorèmes de la valeur initiale et finale

$$\begin{aligned}\lim_{p \rightarrow \infty} p \phi(p) &= \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = f(0) \\ \lim_{p \rightarrow 0} p \phi(p) &= \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)\end{aligned}$$

6.4.7 Dérivation et intégration par rapport à la variable p

$$\phi(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt \Rightarrow \frac{d\phi}{dp} = - \int_0^\infty t f(t) e^{-pt} dt$$

Généralisation : $\boxed{\frac{d^n \phi}{dp^n} = (-1)^n \int_0^\infty t^n f(t) e^{-pt} dt}$

$$\phi(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt \Rightarrow \int_p^\infty \phi(s) ds = \int_0^\infty f(t) \left[-\frac{e^{-st}}{s} \right]_p^\infty dt = \int_0^\infty \frac{e^{-pt}}{p} f(t) dt$$

d'où : $\boxed{\int_p^\infty \phi(s) ds = \frac{f(t)}{t}}$

6.5 Application de la TL : fonction de transfert

6.5.1 Système linéaire SLIT

Un système linéaire stationnaire (*i.e.*, invariant dans le temps) ou **SLIT** est représenté par une boîte noire (Fig. 6.5).

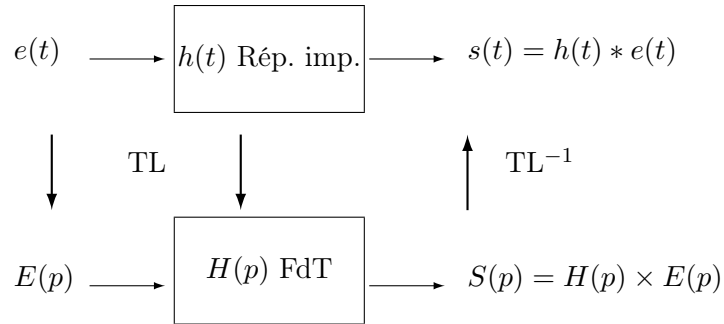


FIGURE 6.5 – Système linéaire.

Il se caractérise au choix par :

- sa réponse impulsionnelle $h(t) : e(t) = \delta(t) \Rightarrow s(t) = h(t)$
- l'EDL qui le régit : $a_n s^{(n)} + \dots + a_1 s' + a_0 s(t) = b_m e^{(m)} + \dots + b_1 e' + b_0 e(t)$

- sa réponse indicielle : quand $e(t) = \mathcal{U}(t)$ (échelon unité de Heaviside)
- sa réponse harmonique : quand $e(t) = A \cos \omega t$ (ou $e^{j\omega t}$)
- sa fonction de transfert $H(p) \subset h(t)$: $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0}$

§13.51

6.5.2 Réponse impulsionnelle et convolution

La sortie du système est la convolution de l'entrée par la réponse impulsionnelle : $s(t) = h(t) * e(t)$.

Un produit de convolution est une intégrale compliquée.

Interprétation graphique : retournement et décalage d'une des fonctions, produit avec l'autre fonction et sommation des aires sous la courbe produit.

6.5.3 Distribution de Dirac

Elle est définie par une limite : $\delta(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} I_\epsilon(x)$ où $I_\epsilon(x)$ est une impulsion infiniment courte (durée ϵ) et infiniment haute (amplitude $1/\epsilon$) :

On en déduit :

- la parité : $\delta(x) = \delta(-x)$ et $\delta(x - a) = \delta(a - x)$
- l'intégrale : $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1$

Produit simple : distribution pondérée par la valeur de la fonction

$$\delta(x - a)f(x) = \delta(x - a)f(a)$$

$$\delta(x)f(x) = \delta(x)f(0) \text{ (cas particulier } a = 0)$$

Élément neutre de la convolution (preuve par la TL : $H(p) = 1$) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - u)f(u)du = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(u)f(x - u)du = \delta(x) * f(x) = f(x)$$

De même :

$$\delta(x - a) * f(x) = f(x - a)$$

On en déduit les intégrales :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)f(x)dx = f(0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - a)f(x)dx = f(a)$$

6.5.4 Intérêt de la TL pour l'étude des systèmes

- simple produit algébrique en p au lieu du produit de convolution en t
- équation algébrique en p (fraction rationnelle) au lieu d'une équation différentielle §13.80
- étude harmonique : on pose $p = j\omega = j2\pi\nu \Rightarrow$ diagramme de Bode (gain et phase)

6.5.5 Réponse harmonique

Notation réelle :

$$e(t) = A \cos(\omega t + \phi) \Rightarrow s(t) = B \cos(\omega t + \psi) \text{ où } A \text{ et } B \in \mathcal{R}$$

Notation complexe :

$$e(t) = \Re[\mathcal{A}e^{j\omega t}] \text{ et } s(t) = \Re[\mathcal{B}e^{j\omega t}] \text{ où } \mathcal{A} \text{ et } \mathcal{B} \in \mathcal{C} : \mathcal{A} = Ae^{i\phi} \text{ et } \mathcal{B} = Be^{i\psi}.$$

Alors en posant $p = j\omega$, on a la relation :

$$H(j\omega) = \frac{S(j\omega)}{E(j\omega)} = \frac{\mathcal{B}e^{j\omega t}}{\mathcal{A}e^{j\omega t}} = \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}} = \frac{B}{A}e^{j(\psi-\phi)}$$

Définition du gain (module de la FdT) : $G = \frac{B}{A}$

Définition du déphasage (argument de la FdT) : $\Delta\Phi = \psi - \phi$

Courbe de Bode : on trace $G_{dB} = 20 \log_{10} G$ et $\Delta\Phi$ en fonction de $\log_{10} \omega$.

Interprétation : la sortie reste sinusoidale (même fréquence), mais est décalée temporellement (déphasage) et son amplitude est modifiée (gain ou atténuation) :

$$\Delta t = \Delta\Phi \frac{T}{2\pi}$$

On a deux FdT typiques :

— 1^{er} ordre : §13.43 §13.83

$$H_1(p) = \frac{1}{1 + \tau p}$$

— 2^e ordre : §13.44 §13.63

$$H_2(p) = \frac{1}{1 + 2\zeta\tau p + \tau^2 p^2}$$

§13.46 §13.49 §13.50 §13.51 §13.52 §13.77

6.6 EDL à coefficients constants

Une EDLCC est une équation de la forme :

$$a_0 y + a_1 y' + \dots + a_n y^{(n)} = \sum_{k=0}^n a_k y^{(k)}(x) = b(x) \quad (6.5)$$

6.6.1 Méthode classique

Elle a été présentée en section 4.4, p. 54.

6.6.2 Méthode symbolique

On utilise la transformée de Laplace en tenant compte des conditions initiales.

Soient : $Y(p) \subset y(x)$ et $B(p) \subset b(x)$.

L'équation différentielle se transforme en :

$$a_n \left[p^n Y(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{n-1-k} y^{(k)}(0) \right] + \dots + a_1 [pY(p) - y(0)] + a_0 Y(p) = B(p) \quad (6.6)$$

$$\Rightarrow Y(p) = \frac{a_n \sum_{k=0}^{n-1} p^{n-1-k} y^{(k)}(0) + \dots + a_1 y(0) + B(p)}{a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0} \quad (6.7)$$

$$\Rightarrow Y(p) = \frac{A(p) + B(p)}{a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0} \quad \text{avec} \quad \deg A(p) = n - 1 \quad (6.8)$$

On décompose judicieusement la fraction en identifiant avec des termes connus donnés dans les tables, ce qui permet ensuite de remonter à l'original $y(x)$, connaissant sa transformée de Laplace $Y(p)$.

[§13.41](#)

[§13.45](#)

[§13.48](#)

[§13.71](#)

[§13.75](#)

[§13.84](#)

Chapitre 7

Transformée de Fourier

Préambule

Cette transformée a initialement été développée par Joseph Fourier pour résoudre le problème de l'équation de diffusion de la chaleur dans un matériau §13.55. Elle trouve son application la plus importante en traitement de signal, pour le filtrage ou l'analyse spectrale, car elle permet de caractériser les signaux non pas dans le domaine temporel ou spatial habituel, mais de manière très pratique dans le domaine fréquentiel.

7.1 Définition

Soit $f(t)$:

- une fonction de la variable réelle t ,
- intégrable,
- admettant un nombre fini de discontinuités de 1^{re} espèce.

La **Transformée de Fourier (TF)** de $f(t)$ est définie par :

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i2\pi \nu t} dt = TF[f(t)]$$

§13.86 §13.90

La formule de réciprocité donne :

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu) e^{+i2\pi \nu t} d\nu = TF^{-1}[F(\nu)]$$

Si l'on pose $\omega = 2\pi \nu$, on a les formules : $F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$, et :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

ω (ou ν) est appelé la variable conjuguée de t (ν est une variable réelle). Le produit νt est sans dimension. En physique, ν correspond à la fréquence (en Hz) et ω correspond à la pulsation (en rad/s). §13.53

7.2 Règles opératoires

7.2.1 Linéarité

La transformée de Fourier d'une combinaison linéaire de fonctions est égale à la combinaison linéaire des transformées :

$$TF [\lambda f_1(t) + \mu f_2(t)] = \lambda TF [f_1(t)] + \mu TF [f_2(t)]$$

7.2.2 Transposition

$$TF [f(-t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(-t) e^{-i2\pi\nu t} dt \quad \begin{matrix} x = -t \\ \downarrow \\ \int_{+\infty}^{-\infty} \end{matrix} f(x) e^{i2\pi\nu x} (-dx) = F(-\nu)$$

$$TF[f(-t)] = F(-\nu)$$

Donc : $\begin{cases} f \text{ paire} \Rightarrow F \text{ paire} \\ f \text{ impaire} \Rightarrow F \text{ impaire} \end{cases}$ §13.72

7.2.3 Conjugaison

$$\text{Soit : } f(t) = f_1(t) + i f_2(t) \quad \text{et} \quad \overline{f(t)} = f_1(t) - i f_2(t)$$

$$\text{Notons : } F(\nu) = TF[f(t)]$$

$$\text{Alors : } TF \left[\overline{f(t)} \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(t)} e^{-i2\pi\nu t} dt = \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i2\pi\nu t} dt} = \overline{F(-\nu)}$$

$$\text{Donc : } TF \left[\overline{f(t)} \right] = \overline{F(-\nu)}$$

$$\begin{array}{ll} \text{si } f \text{ réelle :} & \overline{f(t)} = f(t) \Rightarrow F(\nu) = \overline{F(-\nu)} \quad \textbf{hermitique} \\ \text{si } f \text{ imaginaire pure :} & \overline{f(t)} = -f(t) \Rightarrow \overline{F(-\nu)} = -F(\nu) \quad \textbf{antihermitique} \end{array}$$

7.2.4 Changement d'échelle

— si $a > 0$:

$$TF [f(at)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(at) e^{-i2\pi\nu t} dt \quad \begin{matrix} x = at \\ \downarrow \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \end{matrix} f(x) e^{-i2\pi\nu \frac{x}{a}} \frac{dx}{a} = \frac{1}{a} F\left(\frac{\nu}{a}\right)$$

— si $a < 0$:

$$\begin{aligned} TF[f(a t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(a t) e^{-i2\pi \nu t} dt \quad \overset{x = a t}{\downarrow} \quad \int_{+\infty}^{-\infty} f(x) e^{-i2\pi \frac{\nu}{a} x} \frac{dx}{a} \\ &= \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i2\pi \frac{\nu}{a} x} dx = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\nu}{a}\right) \end{aligned}$$

— donc : $\boxed{\forall a \in \mathbb{R}^* \text{ si } F(\nu) = TF[f(t)] \text{ alors } TF[f(a t)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\nu}{a}\right)}$

7.2.5 Translation de la variable concrète t (règle du retard)

$$TF[f(t - t_0)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - t_0) e^{-i2\pi \nu t} dt \quad \overset{x = t - t_0}{=} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i2\pi \nu (x + t_0)} dx$$

donc : $\boxed{TF[f(t - t_0)] = e^{-i2\pi \nu t_0} F(\nu)}$

7.2.6 Translation de la variable symbolique ν (règle de modulation)

$$\text{Soit } \nu_0 \in \mathbb{R} \quad TF[e^{i2\pi \nu_0 t} f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i2\pi (\nu - \nu_0) t} dt = F(\nu - \nu_0)$$

$$\text{donc pour } \nu_0 \in \mathbb{R} \quad \boxed{TF[e^{i2\pi \nu_0 t} f(t)] = F(\nu - \nu_0)}$$

7.2.7 Dérivation et intégration par rapport à t

$$TF[f'(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \underset{u'}{f'(t)} \cdot \underset{v}{e^{-i2\pi \nu t}} dt \quad \underset{\text{intég. parties}}{=} \quad [f(t) e^{-i2\pi \nu t}]_{-\infty}^{+\infty} + i2\pi \nu F(\nu)$$

donc, si $\lim_{|t| \rightarrow \infty} f(t) = 0$ c'est-à-dire si f est intégrable au sens de Riemann, alors :

$$\boxed{TF[f'(t)] = i2\pi \nu F(\nu)}$$

7.2.7.1 Généralisation

$$TF[f^{(n)}(t)] = (i2\pi \nu)^n F(\nu)$$

7.2.7.2 Intégration

$$\text{Si } \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 0 \quad \text{alors} \quad TF \left[\int_{-\infty}^t f(x) dx \right] = \frac{1}{i2\pi\nu} F(\nu)$$

7.2.8 Dérivation par rapport à ν

$$\frac{dF(\nu)}{d\nu} = \frac{d}{d\nu} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i2\pi\nu t} dt \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) (-i2\pi t) e^{-i2\pi\nu t} dt$$

$$\text{Donc si } F(\nu) = TF[f(t)] \text{ alors } F'(\nu) = TF[-i2\pi t f(t)]$$

Généralisation

$$\boxed{F^{(n)}(\nu) = TF[(-i2\pi t)^n f(t)]}$$

7.2.9 Théorème de convolution

$$\text{Soient : } \begin{cases} F_1(\nu) = TF[f_1(t)] \\ F_2(\nu) = TF[f_2(t)] \end{cases}$$

Considérons le produit de convolution de f_1 et f_2 défini par :

$$g(t) = f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) f_2(t-x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t-x) f_2(x) dx$$

$$\text{Posons } G(\nu) = TF[g(t)]$$

$$G(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i2\pi\nu t} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t-x) f_2(x) dx \right) dt$$

$$\text{C.U. } \Rightarrow G(\nu) = \iint f_1(t-x) f_2(x) e^{-i2\pi\nu(t-x+x)} dt dx$$

$$= \int f_2(x) e^{-i2\pi\nu x} dx \int \underbrace{f_1(t-x)}_u e^{-i2\pi\nu(t-x)} dt = F_2(\nu) \cdot F_1(\nu)$$

Donc

$$\boxed{TF[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(\nu) \cdot F_2(\nu)}$$

$$\text{On montre de même que : } TF[f_1(t) \cdot f_2(t)] = F_1(\nu) * F_2(\nu)$$

7.2.10 Formule de Parseval-Plancherel

$$\text{Soient : } \begin{cases} F_1(\nu) &= TF[f_1(t)] \\ F_2(\nu) &= TF[f_2(t)] \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\nu) \overline{F_2(\nu)} d\nu &= \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\nu) \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t) e^{-i2\pi\nu t} dt} d\nu \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\nu) \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f_2(t)} e^{+i2\pi\nu t} dt d\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f_2(t)} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\nu) e^{+i2\pi\nu t} d\nu}_{f_1(t)} dt \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\nu) \cdot \overline{F_2(\nu)} d\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) \cdot \overline{f_2(t)} dt$$

Cas particulier

$$\text{Si } f_1(t) = f_2(t) = f(t) \quad \text{alors} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\nu)|^2 d\nu$$

7.2.11 Egalité fondamentale (TF des distributions)

$$\text{Si : } F(\nu) = TF[f(t)] \quad \text{alors : } TF[F(t)] = f(-\nu)$$

7.2.12 Moyen mnémotechnique

Connaissant une fonction $f(t)$ et sa transformée $F(\nu)$, on peut déduire une autre relation de transformée, par permutations et remplacement des variables (Fig. 7.1).

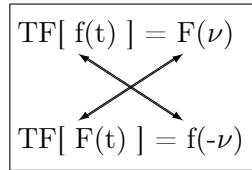


FIGURE 7.1 – Moyen mnémotechnique.

7.3 Relation entre TF et TL

7.3.1 Cas où l'on suppose que $f(t) = f(t)\mathcal{U}(t)$

où $\mathcal{U}(t)$ est la fonction échelon unité, c'est-à-dire que : $f(t) = 0$ pour $t < 0$.

Par définition : $\phi(p) = \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt \subset f(t)$

Posons : $p = x + iy = i2\pi\nu$ (c'est-à-dire que : $x = 0$),

alors : $\phi(i2\pi\nu) = \int_0^\infty f(t) e^{-i2\pi\nu t} dt$.

Comme $f(t) = 0$ pour $t < 0$, on peut écrire :

$$\phi(i2\pi\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i2\pi\nu t} dt = F(\nu)$$

7.3.2 Transformée inverse

Rappel : la transformée de Laplace inverse s'obtient par une intégrale de Mellin-Fourier sur le contour de Bromwich :

$$f(t) = \frac{1}{i2\pi} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} \phi(p) e^{pt} dp$$

Si l'on pose $p = i2\pi\nu$ alors : $\frac{dp}{i2\pi} = d\nu$. Donc, il y aura identité avec la formule de la TF⁻¹ : $f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu) e^{+i2\pi\nu t} d\nu$ si : $C = 0$. Donc $\phi(p)$ ne doit pas posséder de points singuliers à droite de l'axe imaginaire ($x \geq 0$).

7.3.3 Cas où $f(t) \neq 0$ pour $t < 0$

$$\text{Alors } F(\nu) = \int_{-\infty}^0 f(t) e^{-i2\pi\nu t} dt + \int_0^{\infty} f(t) e^{-i2\pi\nu t} dt$$

On fait le changement de variable $t \rightarrow -t$ dans la première intégrale :

$$F(\nu) = \int_0^{\infty} f(-t) e^{i2\pi\nu t} dt + \int_0^{\infty} f(t) e^{-i2\pi\nu t} dt$$

Les deux fonctions $f_1(t) = f(-t) \cdot \mathcal{U}(t)$ et $f_2(t) = f(t) \cdot \mathcal{U}(t)$ sont bien définies pour $t > 0$.

$$\text{Alors : } F(\nu) = \phi_1(-i2\pi\nu) + \phi_2(i2\pi\nu)$$

$$\text{car } \phi_1(p) = \int_0^{\infty} f_1(t) e^{-pt} dt$$

Il faut de même que $C = 0$ pour ϕ_1 et ϕ_2 pour avoir identité des transformées inverses.

7.4 TF de distributions

7.4.1 TF de $\delta(t - a)$

La Fig. 7.2 représente une impulsion de Dirac décalée en a .

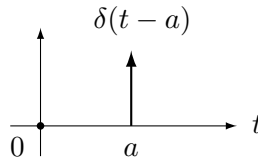


FIGURE 7.2 – Impulsion de Dirac décalée.

$$\begin{aligned}
TF[\delta(t-a)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-a) e^{-i2\pi \nu t} dt \\
\text{or : } \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \delta(x-a) dx &= g(a) \quad \text{pour } g(x) \text{ définie, continue} \\
\Rightarrow TF[\delta(t-a)] &= e^{-i2\pi \nu a} \quad \Rightarrow TF[\delta(t)] = 1
\end{aligned}$$

7.4.2 TF de f(t)=1 au sens des distributions

On applique le moyen mnémotechnique (Fig. 7.3a).

$$\Rightarrow TF[1] = \delta(\nu)$$

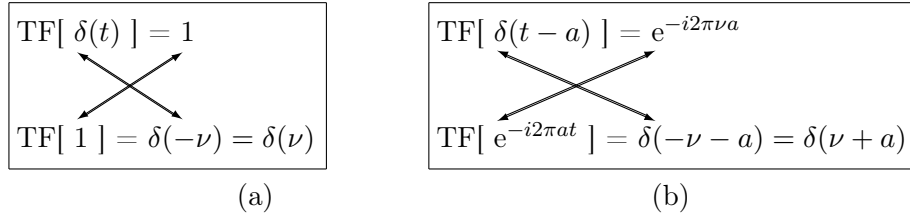


FIGURE 7.3 – Application du moyen mnémotechnique pour obtenir les TF de : (a) une fonction constante ; (b) une exponentielle complexe.

7.4.3 TF de $\exp(i2\pi at)$

On applique encore le moyen mnémotechnique (Fig. 7.3b).

$$\Rightarrow TF[e^{i2\pi a t}] = \delta(\nu - a)$$

7.4.4 TF des sinusoïdes $\cos(2\pi at)$ et $\sin(2\pi at)$

$$\begin{aligned}
TF[\cos 2\pi at] &= \frac{1}{2} [\delta(\nu - a) + \delta(\nu + a)] \\
TF[\sin 2\pi at] &= \frac{1}{2i} [\delta(\nu - a) - \delta(\nu + a)] = \frac{i}{2} [\delta(\nu + a) - \delta(\nu - a)]
\end{aligned}$$

§13.54

7.4.5 Fonctions propres de la TF

Une fonction propre est une fonction qui reste de même nature après transformation.

7.4.5.1 Peigne $p(t)$

Le peigne est une suite infinie d'impulsions :

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n) \quad (7.1)$$

$$TF[p(t)] = P(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-i2\pi \nu n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\nu - n) \quad (7.2)$$

C'est la formule de Poisson.

7.4.5.2 Loi de Laplace-Gauss

La loi gaussienne (dite loi normale) est fréquemment utilisée en probabilités : c'est la fameuse "courbe en cloche" des statistiques.

$$TF\left[e^{-\pi t^2}\right] = e^{-\pi \nu^2} \quad (7.3)$$

Chapitre 8

Transformée de Fourier discrète

Préambule

L'analyse spectrale est une des opérations classiques du traitement de signal. Elle permet d'obtenir l'information sur le contenu fréquentiel d'un signal, qu'il soit analogique ou numérique. La technique la plus utilisée passe par la transformée de Fourier du signal, qui donne de bons résultats pour des signaux observés sur de longues durées, car la résolution fréquentielle (la finesse d'analyse) est inversement proportionnelle à la durée d'observation du signal.

Pour les signaux numériques, le théorème d'échantillonnage est fondamental à respecter sous peine d'erreur grossière d'interprétation. C'est à Claude Shannon que l'on doit ce fameux théorème dit de Shannon, de même que les fondements de la théorie de l'information (dont la notion d'entropie) qui est à la base du codage pour la compression et la transmission de données en télécommunications. Ingénieur en génie électrique et mathématicien, il est aussi un précurseur de l'intelligence artificielle (invention d'une *learning machine*, programmation d'un jeu d'échecs). Bref, il a incontestablement sa place sur le podium¹ dans un ouvrage de mathématique pour l'électronique.

8.1 Introduction

Par abus de langage, on emploie souvent indifféremment les deux termes spectre et transformée de Fourier, sans se soucier de la phase de la transformée de Fourier. Mais en toute rigueur, le spectre d'un signal est le module au carré de sa transformée de Fourier.

L'analyse spectrale d'un signal analogique déterministe par une technique numérique comporte deux étapes essentielles :

1. C'est pourquoi une photo de lui, jonglant sur un monocycle, est visible en page [347](#).

- la conversion analogique-numérique du signal : c'est l'**échantillonnage**,
- le calcul de la **Transformée de Fourier Discrète (TFD)**.

Ces deux étapes génèrent des distorsions qui peuvent perturber l'analyse. Pour interpréter correctement les spectres obtenus, il faut connaître l'origine et les conséquences de ces distorsions, ainsi que les techniques permettant de les minimiser [27]. On étudiera d'abord les conséquences de l'échantillonnage temporel d'un signal, puis on mettra en évidence les problèmes posés par le recours à la TFD [43].

8.2 Conversion analogique-numérique

8.2.1 Échantillonnage et quantification

La conversion d'un signal analogique en une séquence de valeurs numériques, ou **signal numérique**, se divise en deux phases :

- la prise d'échantillons du signal à intervalles de temps réguliers dont la durée est appelée période d'échantillonnage T_e . Cet **échantillonnage temporel** peut induire des distorsions gênantes si les conditions du **théorème de Shannon** ne sont pas vérifiées (§ 8.2.2).
- la **quantification** des valeurs des échantillons ainsi prélevés, avec un écart maximal entre la valeur réelle et la valeur stockée qui dépend du nombre de bits dont dispose le convertisseur analogique-numérique. Si le signal a un spectre suffisamment étendu, on assimile les conséquences de cette quantification à la **superposition d'un bruit blanc** sur le signal d'origine. Si le nombre de bits du calculateur est suffisant et si l'amplitude du signal à analyser est assez forte, on peut considérer que le rapport signal sur bruit de quantification est très grand, et négliger les effets de la quantification.

8.2.2 Echantillonnage temporel

Considérons un signal analogique $x_a(t)$ de transformée de Fourier $X_a(\nu)$. Notons $x_e(t)$ le signal résultant de l'échantillonnage de $x_a(t)$ à la fréquence $F_e = 1/T_e$. Il est défini par :

$$\begin{cases} x_e(t) = x_a(t) = x_n & \text{si } t = nT_e \\ x_e(t) = 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (8.1)$$

On peut écrire :

$$x_e(t) = x_a(t) \cdot e(t) \quad (8.2)$$

où $e(t)$ est le peigne de Dirac de période T_e :

$$e(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e) \quad (8.3)$$

Soit $E(\nu)$ la transformée de Fourier de $e(t)$:

$$E(\nu) = F_e \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\nu - kF_e) \quad (8.4)$$

La transformée de Fourier $X_e(\nu)$ de $x_e(t)$ est donnée par le produit de convolution :

$$X_e(\nu) = X_a(\nu) * E(\nu) = X_a(\nu) * F_e \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\nu - kF_e) \quad (8.5)$$

soit :

$$X_e(\nu) = F_e \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_a(\nu - kF_e) \quad (8.6)$$

Le spectre du signal échantillonné correspond donc, au facteur multiplicatif F_e près, à la périodisation à période F_e du spectre $X_a(\nu)$ du signal analogique. Nous allons voir que cette **périodisation spectrale** peut introduire une distorsion du spectre dans la bande de fréquences considérée, à savoir $] -F_e/2; F_e/2[$.

Supposons d'abord que $X_a(\nu) = 0$ pour $|\nu| > F_m$ où F_m est la fréquence maximale du signal. Selon le théorème de Shannon, si $x_a(t)$ est un signal d'**énergie finie**, on peut retrouver sans distorsion le signal $x_a(t)$ à partir du signal échantillonné $x_e(t)$ si et seulement si :

$$F_e \geq 2F_m. \quad (8.7)$$

Dans ce cas (Fig. 8.1), les spectres $X_a(\nu)$ et $X_e(\nu)$ coïncident parfaitement sur l'intervalle $] -F_e/2; F_e/2[$, et la périodisation spectrale liée à l'échantillonnage temporel n'a pas de conséquence sur l'analyse spectrale du signal étudié.

En revanche, si $F_e < 2F_m$ ou bien si le signal n'est pas à spectre borné, il y a **recouvrement** ou **repliement de spectre** (Fig. 8.2) Les deux spectres $X_e(\nu)$ et $X_a(\nu)$ ne coïncident plus sur l'intervalle $] -F_e/2; F_e/2 [$: on a un rehaussement d'énergie en bouts de bande autour de $\pm F_e/2$. La distorsion liée à la périodisation spectrale est alors telle que l'analyse de Fourier du signal échantillonné ne permet pas d'avoir une bonne description du spectre du signal analogique. On ne pourra pas reconstituer correctement le signal analogique à partir de ses échantillons. §??

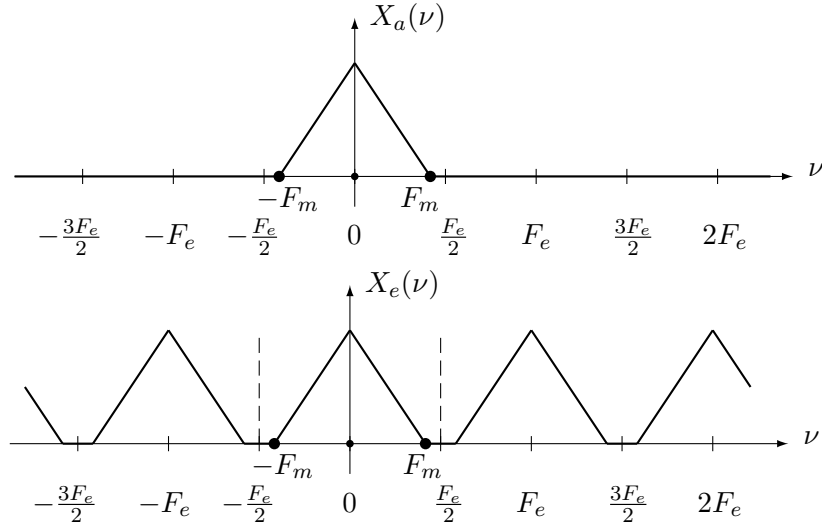


FIGURE 8.1 – Respect du théorème de Shannon : aucune distorsion dans la bande $] -F_e/2; F_e/2[$.

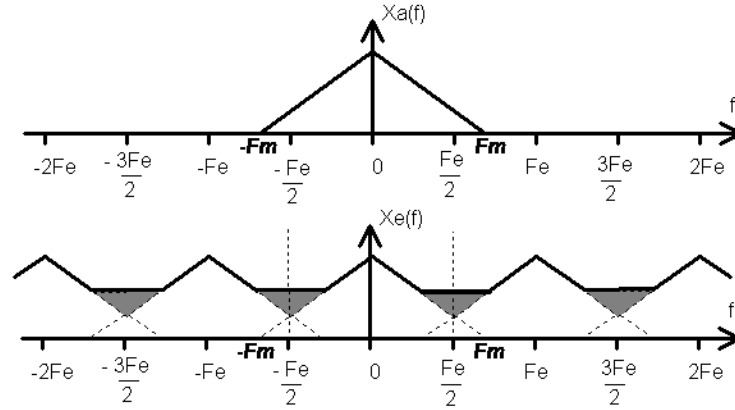


FIGURE 8.2 – Recouvrement de spectre (repliement) : distorsions dans la bande $] -F_e/2; F_e/2[$.

8.3 Transformée de Fourier discrète

8.3.1 TFDT d'un signal causal

Le signal $x_e(t)$, échantillonnée idéale de $x_a(t)$, peut s'écrire d'après (8.2) :

$$x_e(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n \delta(t - nT_e) \quad (8.8)$$

Donc la transformée de Fourier $X_e(\nu)$ du signal échantillonné $x_e(t)$ s'exprime par :

$$X_e(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n \exp(-j2\pi n\nu T_e) \quad (8.9)$$

Le signal $x_e(t)$ étant défini par une séquence discrète de valeurs x_n dans le temps, $X_e(\nu)$ est appelée **Transformée de Fourier Discrète dans le Temps (TFDT)**. Notons que dans cette expression, le temps est discrétisé tandis que la fréquence reste continue. Si le signal $x_e(t)$ est causal, c'est-à-dire que $x_n = 0$ pour $n < 0$, alors l'expression de la TFDT se simplifie :

$$X_e(\nu) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \exp(-j2\pi n\nu T_e) \quad (8.10)$$

Nous supposons dans la suite que nous traitons toujours un signal causal.

8.3.2 Troncature temporelle

Pour une fréquence ν donnée, le calcul sur ordinateur de la TFDT ci-dessus est possible si le signal est de durée finie (x_n est nul à partir d'un certain indice $n = N$). En revanche, si le signal est de durée *a priori* infinie, la TFDT n'est pas calculable sur ordinateur (somme infinie). Pour y remédier, il faut faire l'hypothèse qu'à partir d'un certain indice $n = N$, les échantillons x_n sont négligeables. Alors, l'expression de la TFDT $X_e(\nu)$ devient :

$$X_e(\nu) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \exp(-j2\pi n\nu T_e) \quad (8.11)$$

Cette démarche consistant à assimiler un signal de durée infinie à un signal de durée finie est appelée **troncature temporelle**. Elle peut avoir des conséquences spectrales fâcheuses si l'hypothèse sur la faiblesse de l'amplitude des x_n pour $n \geq N$ est fautive. Du point de vue mathématique, la troncature revient à multiplier le signal $x_e(t)$ par une porte causale $\pi_T(t)$ de largeur $T = N.T_e$, qu'on appelle aussi **fenêtre rectangulaire**, définie par :

$$\begin{cases} \pi_T(t) = 1 & \text{si } t \in [0; (N-1)T_e] \\ \pi_T(t) = 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (8.12)$$

En d'autres termes, on assimile le signal $x_e(t)$ à un signal $x_T(t)$ défini par :

$$x_T(t) = x_e(t) \cdot \pi_T(t) \quad (8.13)$$

Ceci revient à assimiler la TFDT $X_e(\nu)$ à la TFDT $X_T(\nu)$, résultat de la convolution :

$$X_T(\nu) = X_e(\nu) * \Pi_T(\nu) \quad (8.14)$$

où $\Pi_T(\nu)$ est la transformée de Fourier de la porte de largeur T :

$$\Pi_T(\nu) = T \frac{\sin(\pi\nu T)}{\pi\nu T} \exp(-j\pi\nu T) \quad (8.15)$$

N.B. : L'exponentielle complexe $\exp(-j\pi\nu T)$, terme de déphasage dû au fait que la porte est causale centrée en $T/2$, ne modifie en rien le module de la transformée de Fourier.

Cette convolution par un sinus cardinal induit des distorsions caractérisées par un **élargissement spectral** et l'apparition d'**ondulations** dans le voisinage des zones de transition du spectre² (zones de fréquences où est concentrée l'énergie) : c'est ce que l'on appelle le **phénomène de Gibbs** (Fig. 8.3).

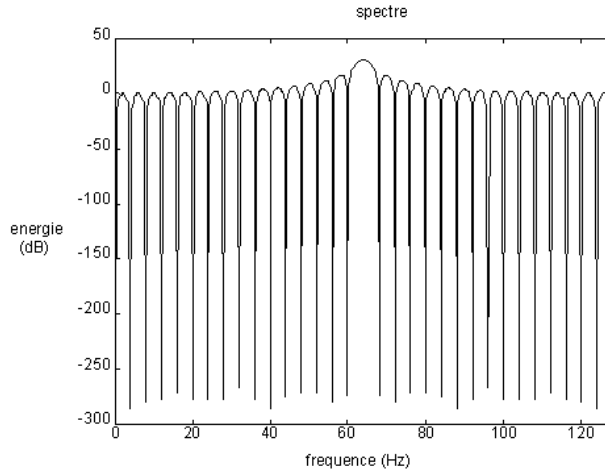


FIGURE 8.3 – Phénomène de Gibbs pour le spectre d'un sinus représenté sur l'intervalle $[0; F_e/2]$.

8.3.3 Pondération temporelle

Pour diminuer les incidences spectrales de la troncature temporelle, on peut pondérer le signal échantillonné par une fonction qui laisse inchangés les échantillons situés au centre de la fenêtre, et qui atténue plus ou moins les échantillons situés sur les bords de cette fenêtre. Cela revient à calculer la TFDT

2. Classiquement, on ne représente le spectre que dans l'intervalle $[0; F_e/2]$ car on sait que pour les signaux réels, le spectre est symétrique par rapport à $\nu = 0$: $X(-\nu) = X^*(\nu)$, où $*$ dénote le complexe conjugué.

pour un signal multiplié non plus par une fenêtre rectangulaire de durée T (Eq. 8.13), mais par une fenêtre de pondération temporelle de même durée, appelée aussi **fenêtre d'apodisation**.

Il existe de nombreux types de pondérations. Toutes ont comme objectif de réduire l'amplitude des ondulations et l'élargissement spectral associés au phénomène de Gibbs, mais elles ont des propriétés spécifiques différentes. Nous limiterons notre étude à trois fenêtres de pondération, dont les propriétés sont représentatives des grandes catégories de pondérations possibles :

— la fenêtre de **Hanning**, d'expression temporelle :

$$\begin{cases} w_h(t) = 0.5 \left[1 - \cos \left(\frac{2\pi t}{(N-1)T_e} \right) \right] & \text{si } t \in [0; (N-1)T_e] \\ w_h(t) = 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (8.16)$$

— la fenêtre de **Hamming**, d'expression temporelle :

$$\begin{cases} w_H(t) = 0.54 - 0.46 \cos \left(\frac{2\pi t}{(N-1)T_e} \right) & \text{si } t \in [0; (N-1)T_e] \\ w_H(t) = 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (8.17)$$

— la fenêtre de **Blackman**, d'expression temporelle :

$$\begin{cases} w_B(t) = 0.42 - 0.5 \cos \left[\frac{2\pi t}{(N-1)T_e} \right] + 0.08 \cos \left[\frac{4\pi t}{(N-1)T_e} \right] & \text{si } t \in [0; (N-1)T_e] \\ w_B(t) = 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (8.18)$$

Quelle que soit la fenêtre de pondération temporelle, le module de sa transformée de Fourier est constitué d'un **lobe central** ou principal d'amplitude unité et de largeur variable selon la pondération, et d'une succession de **lobes secondaires** dont l'amplitude relative à celle du lobe principal décroît plus ou moins vite selon la pondération. Ces différentes propriétés sont résumées dans le Tab. 8.1.

TABLE 8.1 – Caractéristiques des fenêtres de pondération.

Fenêtre	Atténuation (en dB) du premier lobe secondaire	Largeur (en Hz) du lobe principal	Vitesse d'atténuation des lobes secondaires
Rectangulaire	-13	$2Fe/N$	Lente
Hanning	-31	$4Fe/N$	Rapide
Hamming	-41	$4Fe/N$	Lente
Blackman	-57	$6Fe/N$	Très rapide

L'intérêt de chaque pondération dépend à la fois des objectifs recherchés et du type de signal analysé : signal à spectre continu, signal périodique, signal à large spectre, signal à spectre étroit ...

8.3.4 Echantillonnage fréquentiel - TFD

Pour une fréquence ν donnée, on peut calculer la TFDT et contrôler dans une certaine mesure les distorsions liées au phénomène de Gibbs grâce aux fenêtres de pondération. Mais le calcul sur ordinateur de l'ensemble du spectre, autrement dit de la TFDT pour $\nu \in [0, F_e/2]$, n'est évidemment possible que pour un nombre fini de valeurs de la fréquence. Il faut donc échantillonner en fréquence la TFDT sur cet intervalle.

Compte tenu du théorème de Shannon, la durée du signal temporel analysé étant égale³ à $T = N.T_e$, il suffit d'échantillonner la TFDT à une "fréquence" égale à $N.T_e$, ce qui revient à prendre un échantillon spectral tous les F_e/N . Le spectre ainsi échantillonné, représentation spectrale discrète d'un signal discret dans le temps, est appelé **Transformée de Fourier Discrète** (TFD). La TFD est alors donnée par les valeurs X_k définies par :

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \exp(-j \frac{2\pi nk}{N}) \quad (8.19)$$

N.B. : Pour le calcul de la formule (8.19) sur ordinateur, il existe un algorithme rapide appelé FFT (*Fast Fourier Transform*) : FFT 1D pour les signaux et FFT 2D pour les images.

Notons que dans cette expression, le temps et la fréquence sont échantillonnés. Cet échantillonnage fréquentiel peut avoir une influence notable sur l'allure du spectre.

En effet, considérons le cas simple d'une cosinussoïde de fréquence f_0 , échantillonnée à la fréquence F_e et observée sur une fenêtre de durée $T = N.T_e$, où N représente le nombre d'échantillons du signal. Son spectre continu théorique sur $[0; F_e/2]$ correspond à un sinus cardinal dont le maximum est centré en f_0 , et dont les zéros sont espacés de $1/T$ car :

$$\left| \frac{1}{2} \delta(\nu - f_0) * T \frac{\sin(\pi \nu T)}{\pi \nu T} \right|^2 = \left| K \frac{\sin \pi(\nu - f_0)T}{\pi(\nu - f_0)T} \right|^2 \quad (8.20)$$

Or on a justement : $\frac{1}{T} = \frac{1}{N.T_e} = \frac{F_e}{N}$ c'est-à-dire que l'espacement entre les zéros du **sinc** est le même que l'espacement entre les points du spectre échantillonné.

3. N est le nombre d'échantillons du signal sans *zero-padding* (cf. commentaire sur la **fft** en annexe 14.8.4.2).

Ainsi, si $f_0 = k.F_e/N$ (avec k entier), les échantillons du spectre tombent exactement sur les zéros du sinc (Fig. 8.4a). Alors le phénomène de Gibbs, bien que présent, n'apparaît pas à la visualisation du spectre échantillonné (raie spectrale fine). Il est masqué par l'échantillonnage fréquentiel.

Par contre, si $f_0 = (k + 1/2).F_e/N$, les échantillons du spectre tombent sur les maxima des lobes secondaires du sinc (Fig. 8.4b). Alors le phénomène de Gibbs est le plus apparent (raie spectrale très large). L'échantillonnage fréquentiel révèle clairement le phénomène, dit de **fuite d'énergie** (*leakage* en anglais), où l'amplitude de la raie fréquentielle est diminuée.

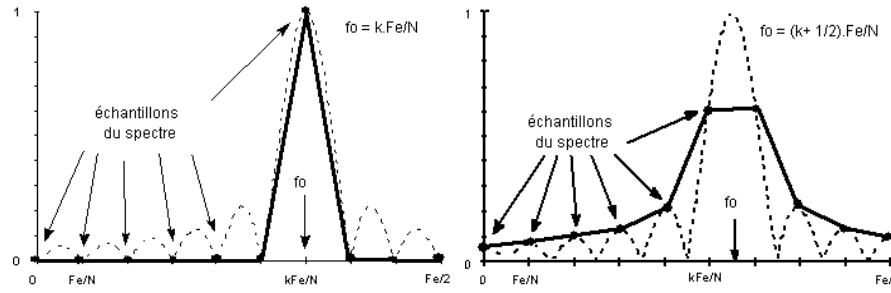


FIGURE 8.4 – Influence de l'échantillonnage fréquentiel : a) Echantillonnage passant par les zéros du sinc ; b) Echantillonnage passant par les maxima du sinc.

On peut résumer cette discussion en calculant le rapport :

$$r = \frac{f_0}{\Delta f} \text{ avec } \Delta f = \frac{F_e}{N} \text{ c'est-à-dire } r = \frac{Nf_0}{F_e} = Tf_0 = \frac{T}{T_0} \quad (8.21)$$

où T_0 représente la période du signal sinusoïdal. Selon la valeur de r , on sera dans un cas d'échantillonnage fréquentiel induisant plus ou moins de fuite d'énergie, les cas extrêmes correspondant respectivement à r demi-entier et r entier. Tous les cas intermédiaires sont bien sûr possibles. En pratique évidemment, on ne peut pas maîtriser ce paramètre r sans connaissance *a priori* sur le signal (il faudrait connaître f_0 ... ce qui est justement le but de l'analyse spectrale !) Il faudra donc toujours se méfier du phénomène de fuite d'énergie éventuelle avant d'interpréter un spectre ...

Dans le cas d'une analyse avec une fenêtre rectangulaire, on peut aboutir à des représentations spectrales très différentes pour des signaux de même type (cf. Fig. 8.5 pour le cas d'une sinusoïde) soit parce que l'on a modifié légèrement la fréquence d'échantillonnage ou le nombre de points acquis, soit parce que la fréquence du signal est légèrement différente. Là encore, le recours aux pondérations décrites au § 8.3.3 peut s'avérer utile.

Signalons pour finir que l'on peut également interpréter ce phénomène de fuite d'énergie d'un point de vue temporel. L'échantillonnage fréquentiel se traduit en effet par une périodisation temporelle à la période $T = N.T_e$ du signal analogique original. Le spectre échantillonné de $x_e(t)$ correspond donc en fait au spectre d'un signal périodique de période T , dont une période correspond aux N premiers échantillons de $x_e(t)$. Si le rapport T/T_0 n'est pas entier, le signal périodisé présentera des discontinuités aux raccordements des tranches de signal, qui se traduiront par des distorsions spectrales plus ou moins importantes selon la nature de ces discontinuités. Comme $T = N.T_e$, on comprend que cette interprétation temporelle revient exactement à l'interprétation fréquentielle précédente où on calculait le rapport :

$$r = \frac{Nf_0}{F_e} = Tf_0 = \frac{T}{T_0}. \quad (8.22)$$

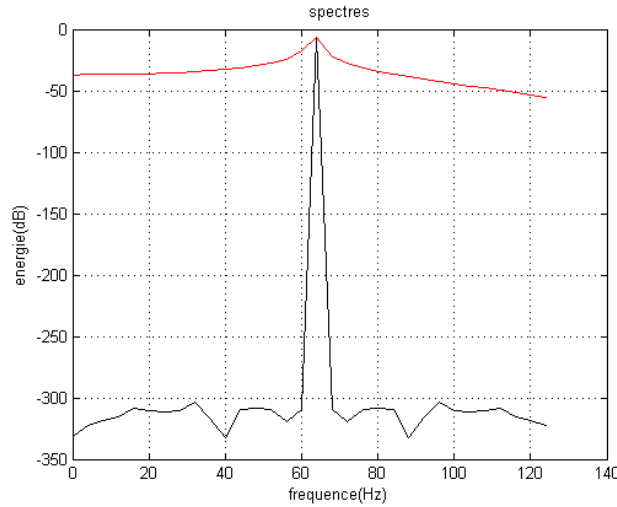


FIGURE 8.5 – Spectres discrets (TFD sur $[0; F_e/2]$) de deux signaux sinusoïdaux de fréquences très proches (64 Hz et 63.125 Hz) pour une même fréquence d'échantillonnage $F_e = 256$ Hz et un même nombre d'échantillons $N = 64$.

Chapitre 9

Transformée en Z

Préambule

Comme les autres transformées, la transformée en Z permet de travailler dans le domaine des fréquences. Mais elle s'applique uniquement au cas des signaux échantillonnés. Elle est donc utile en traitement du signal numérique d'une part (filtrage numérique [§13.56]), et en automatique discrète d'autre part (conception de correcteurs numériques pour optimiser le fonctionnement d'un asservissement). Son importance grandit avec le développement de la technologie numérique qui nous entoure, en remplaçant l'ancien monde analogique régi par la transformée de Laplace [44, 42, 26, 8, 38, 10].

9.1 Introduction sur l'échantillonnage

Notons $f^*(t)$ la fonction échantillonnée (suite d'impulsions espacées de T_e) correspondant à une fonction continue $f(t)$ (Fig. 9.1).

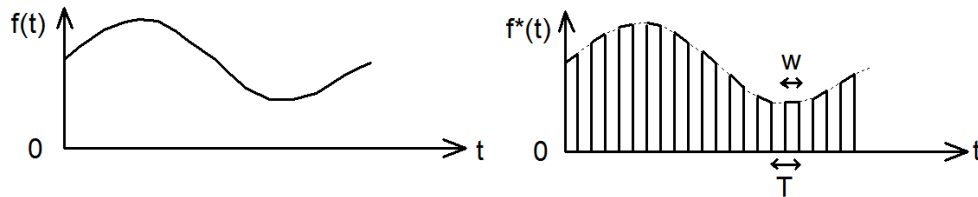


FIGURE 9.1 – Echantillonnage temporel.

Il est intéressant de poser :

$$z = e^{pT_e} \quad (9.1)$$

dans l'expression de sa TL $\phi^*(p)$ car $\phi^*(p)$ est alors une fonction rationnelle de $\exp(pT_e)$. On obtient ainsi une [Transformée en Z \(TZ\)](#).

9.2 Rappel sur les distributions

9.2.1 Fonction d'échantillonnage (peigne de Dirac)

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & \text{pour } 0 < t < \varepsilon \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (9.2)$$

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e). \quad (9.3)$$

9.2.2 Fonction échantillonnée

C'est un exemple de distribution (qui n'a pas de sens au sens des fonctions, ni de l'intégrale de Riemann) :

$$f^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f(t) \delta(t - nT_e) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT_e) \delta(t - nT_e)$$

§13.58

9.3 TL d'une fonction échantillonnée

- $f(t)$ continue par morceaux pour $t \geq 0$
- $f(t) = 0$ pour $t < 0$
- $f(t)$ d'ordre exponentiel α_0 ,

c'est-à-dire : $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \mid \forall n > N \quad \forall \alpha > \alpha_0 \quad |f(nT_e)| e^{-\alpha nT_e} < \varepsilon$

$$\phi^*(p) = \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f(t) \delta(t - nT_e) e^{-pt} dt = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT_e) \underbrace{\int_0^{\infty} \delta(t - nT_e) e^{-pt} dt}_{e^{-nT_e p}}$$

$$\Rightarrow \quad \phi^*(p) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT_e) e^{-nT_e p} \quad \text{pour } \Re(p) > \alpha_0 \text{ (abscisse de convergence).}$$

Le changement de variable $z = e^{pT_e}$ transforme l'axe de convergence $\Re(p) = \alpha_0$ en le cercle : $z = e^{(\alpha_0 + j\omega)T_e} \Leftrightarrow |z| = e^{\alpha_0 T_e}$

$$F(z) = \phi^*(p) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT_e) z^{-n} = Z[f(t)] = Z[f(nT_e)] ; \quad |z| > e^{\alpha_0 T_e}$$

Souvent, on prend : $T_e = 1$. §13.47

9.4 TZ des puissances de t

$$TZ [t^k] = \sum_{n=0}^{\infty} n^k T_e^k z^{-n} \text{ converge pour } |z| > 1 \quad (\text{critère de d'Alembert})$$

$$= T_e z \sum_{n=0}^{\infty} n^{k-1} T_e^{k-1} n z^{-(n+1)}$$

$$TZ [t^{k-1}] = \sum_{n=0}^{\infty} n^{k-1} T_e^{k-1} z^{-n}$$

$$\frac{d}{dz} TZ [t^{k-1}] = - \sum_{n=0}^{\infty} n^{k-1} T_e^{k-1} n z^{-(n+1)} \Rightarrow TZ [t^k] = -T_e z \frac{d}{dz} Z [t^{k-1}]$$

$$\text{pour } k = 0 : TZ [1] = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{z}{z-1} \text{ pour } |z| > 1$$

$$\text{Donc : } TZ [t] = \frac{T_e z}{(z-1)^2}$$

La TZ étant obtenue avec la TL et un changement de variable, c'est donc une transformation **linéaire**.

$$\boxed{\text{TZ [polynôme en } t \text{]} = \text{fonction rationnelle en } z}$$

9.5 TZ de f(t)exp(-at)

$$Z [e^{-at} f(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT_e) e^{-anT_e} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT_e) (ze^{aT_e})^{-n}$$

$$\text{donc si } F(z) = Z [f(t)] \quad \text{alors} \quad Z [e^{-at} f(t)] = F(e^{aT_e} z)$$

9.6 Théorème

Si $f(t)$ est une somme finie de termes du type t^k et $t^k e^{-at}$, dont la TL est d'abscisse de convergence α_0 , alors la TZ est une fraction rationnelle en z , ayant tous ses pôles à l'intérieur du cercle de rayon $e^{\alpha_0 T_e}$.

9.7 Translation temporelle

9.7.1 Retard

$$Z[f(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT_e) z^{-n}$$

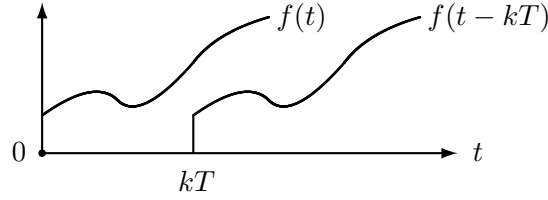


FIGURE 9.2 – Fonction retardée.

Fonction retardée : $g(t) = f(t - kT_e) \cdot \mathcal{U}(t - kT_e)$ avec : $\mathcal{U}(t - kT_e) = 0$ pour $t < kT_e$.

$$\begin{aligned} Z[g(t)] &= \sum_{n=0}^{\infty} g(nT_e) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} f[(n-k)T_e] \underbrace{\mathcal{U}[(n-k)T_e]}_{=0 \text{ si } n < k} z^{-n} \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} f[(n-k)T_e] z^{-n} = 0 + \dots + 0 + f(0) z^{-k} + f(T_e) z^{-(k+1)} + \dots \end{aligned}$$

$$Z[f(t - kT_e) \mathcal{U}(t - kT_e)] = z^{-k} Z[f(t)]$$

donc : z^{-1} = opérateur retard

9.7.2 Avance

$$Z[f(t + kT_e)] = \sum_{n=0}^{\infty} f[(n+k)T_e] z^{-n} = z^k \sum_{n=0}^{\infty} f[(n+k)T_e] z^{-(n+k)}$$

$$Z[f(t + kT_e)] = z^k \sum_{m=k}^{\infty} f(mT_e) z^{-m} = z^k \left[F(z) - \sum_{m=0}^{k-1} f(mT_e) z^{-m} \right]$$

§13.59

9.8 Théorème de la valeur initiale

$$F(z) = Z[f(t)] = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} f(nT_e) z^{-n} \quad ; \quad |z| > e^{\sigma T_e}$$

La série converge uniformément pour $|z| \geq R' > e^{\sigma T_e}$ donc la limite de la série quand $|z| \rightarrow \infty$ est obtenue en prenant la limite de chaque élément terme à terme :

$$\boxed{\lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = f(0)}$$

9.9 Théorème de la valeur finale

$$f(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) F(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1}) F(z)$$

Preuve

$$\begin{aligned} z F(z) - F(z) &= [zf(0) + Z[f(t+T_e)]] - Z[f(t)] \\ \Rightarrow Z[f(t+T_e) - f(t)] &= (z-1) F(z) - zf(0) \\ \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} [f((n+1)T_e) - f(nT_e)] z^{-n} &= (z-1) F(z) - zf(0) \\ & \quad f(T_e) - f(0) \\ & \quad f(2T_e) - f(T_e) \\ & \quad \dots \\ \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(nT_e) z^{-n} - f(0) &= (z-1) F(z) - zf(0) \end{aligned}$$

Si on fait tendre z vers 1, on a : $\boxed{\lim_{z \rightarrow 1} (z-1) F(z) = f(\infty)}$

9.10 Formule d'inversion

Posons : $z = Re^{j\theta}$ dans l'équation $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT_e) z^{-n}$:

$$F(Re^{j\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT_e) \frac{1}{R^n} e^{-jn\theta} \quad R > e^{\sigma T_e}$$

On peut décomposer partie réelle et imaginaire :

$$f_1(\theta) = \Re[F(Re^{j\theta})] \quad \text{et} \quad f_2(\theta) = \Im[F(Re^{j\theta})]$$

$$f_1(\theta) + j f_2(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT_e) \frac{1}{R^n} \cos n\theta - j \sum_{n=1}^{\infty} f(nT_e) \frac{1}{R^n} \sin n\theta$$

Utilisons les formules des coefficients des séries de Fourier :

$$f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_1(\theta) d\theta$$

$$f(nT_e) = \frac{R^n}{\pi} \int_0^{2\pi} f_1(\theta) \cos n\theta d\theta$$

$$f(nT_e) = -\frac{R^n}{\pi} \int_0^{2\pi} f_2(\theta) \sin n\theta d\theta$$

Additionnons les deux dernières équations et divisons par 2 :

$$\begin{aligned} f(nT_e) &= \frac{R^n}{2\pi} \int_0^{2\pi} [f_1(\theta) \cos n\theta - f_2(\theta) \sin n\theta] d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Re[F(Re^{j\theta}) R^n e^{jn\theta}] d\theta \end{aligned}$$

car : $F(Re^{j\theta}) = f_1(\theta) + j f_2(\theta)$ et : $R^n e^{jn\theta} = R^n (\cos n\theta + j \sin n\theta)$

$F(z)$ est une fonction réelle de z donc :

— $\Re[F]$ est fonction paire de θ

— $\Im[F]$ est fonction impaire de θ

Donc :

$$\Im[F(Re^{j\theta}) R^n e^{jn\theta}] = \Re[F(Re^{j\theta})] \Im(R^n e^{jn\theta}) - \Im[F(Re^{j\theta})] \Re(R^n e^{jn\theta})$$

est une fonction impaire de θ , ce qui entraîne que :

$$\int_0^{2\pi} \Im[F(Re^{j\theta}) R^n e^{jn\theta}] d\theta = 0$$

$$\text{On peut donc réécrire : } f(nT_e) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(Re^{j\theta}) R^n e^{jn\theta} d\theta$$

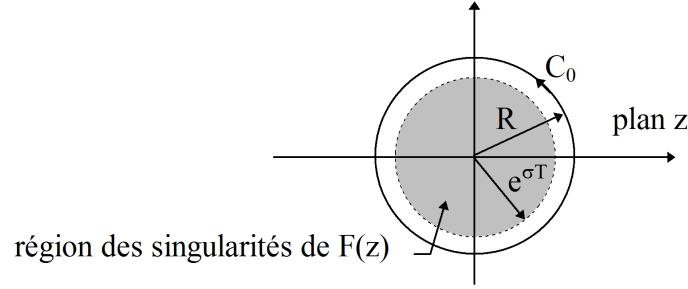


FIGURE 9.3 – Contour d'intégration utilisé pour la TZ inverse.

Considérons un contour d'intégration C_0 circulaire dans le sens direct de rayon $R > e^{\sigma T_e}$ (Fig. 9.3) :

On fait donc une intégration sur ce contour : $Re^{j\theta} = z$ et $d\theta = \frac{1}{jz} dz$

$$\text{d'où : } \begin{cases} f(nT_e) = \frac{1}{j2\pi} \oint_{C_0} z^{n-1} F(z) dz \\ f(nT_e) = \sum_k \text{Résidu} [z^{n-1} F(z); z = p_k] \end{cases} \quad \text{où } p_k = \text{pôles de } F(z)$$

que l'on peut écrire : $f(nT_e) = Z^{-1}[F(z)]$.

On voit donc que cette formule ne donne $f(t)$ que pour les valeurs entières de n .

Elle ne donne pas une détermination unique de $f(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$. §13.57

9.11 Propriété périodique de $\phi^*(p)$ et relation avec $\phi(p)$

$$z = e^{pT_e} \quad \phi^*(p) = F(z)$$

comme : $e^{pT_e} = e^{\left(p + j\frac{2\pi n}{T_e}\right)T_e}$, on en déduit que $F(z)$ est une fonction périodique :

$$\phi^*(p) = \phi^*\left(p + \frac{j2\pi n}{T_e}\right)$$

On a : $f^*(t) = f(t) p(t)$

Or on montre que (formule de Poisson) : $p(t) = \frac{1}{T_e} \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{2i\pi n t}{T_e}}$

$$\text{Donc : } f^*(t) = \frac{1}{T_e} \sum_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{\frac{2i\pi n t}{T_e}}$$

$$\text{D'où : } \phi^*(p) = \frac{1}{T_e} \sum_{-\infty}^{+\infty} TL \left[f(t) e^{\frac{2i\pi n t}{T_e}} \right]$$

Or : $f(t) e^{-at} \supset \phi(p+a)$

Donc : $TL \left[f(t) e^{\frac{2i\pi nt}{T_e}} \right] = \phi\left(p - \frac{2i\pi n}{T_e}\right)$

Conclusion : $\phi^*(p) = \frac{1}{T_e} \sum_{-\infty}^{+\infty} \phi\left(p + \frac{2i\pi n}{T_e}\right)$

9.12 Expression de $\phi^*(p)$ à l'aide des résidus

$$\phi^*(p) = F(z) = \sum_{\substack{p_i \\ \text{pôles de } F(\nu)}} \text{Résidus} \left[\frac{F(\nu)}{1 - e^{\nu T_e} z^{-1}} \right]_{\nu = p_i}$$

Si $F(\nu) = \frac{N(\nu)}{D(\nu)}$, le résidu correspondant à un pôle simple vaut :

$$r_i = \frac{N(p_i)}{\frac{d}{d\nu} [D(\nu) (1 - e^{\nu T_e} z^{-1})]_{\nu=p_i}} = \frac{N(p_i)}{D'(p_i) (1 - e^{p_i T_e} z^{-1})}$$

Donc si $F(\nu)$ n'a que des pôles simples :

$$F(z) = \sum_{p_i} \frac{N(p_i)}{D'(p_i)} \frac{1}{1 - e^{p_i T_e} z^{-1}}$$

Pour des pôles multiples : pôle d'ordre n

$$r_i = \frac{1}{(n-1)!} \left[\frac{d^{n-1}}{d\nu^{n-1}} \left((\nu - p_i)^n F(\nu) \frac{1}{1 - e^{T_e \nu} z^{-1}} \right) \right]_{\nu=p_i}$$

Rappel sur les résidus

— cas d'un pôle simple z_0 :

$$\text{Res} [F(z) \text{ en } z = z_0] = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) F(z) = \frac{N(z_0)}{D'(z_0)} \text{ si } F(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

— cas d'un pôle multiple z_0 d'ordre n :

$$\text{Res} [F(z) \text{ en } z = z_0] = \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z - z_0)^n F(z)]_{z=z_0}$$

9.13 Dérivation et intégration par rapport à un paramètre

$$Z \left[\frac{\partial}{\partial a} f(nT_e, a) \right] = \frac{\partial}{\partial a} F(z, a)$$

$$Z \left[\int_{a_0}^{a_1} f(nT_e, a) da \right] = \int_{a_0}^{a_1} F(z, a) da$$

Nous avons en effet : $F(z, a) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT_e, a) z^{-n}$

$$\text{Donc : } \frac{\partial F(z, a)}{\partial a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial f(nT_e, a)}{\partial a} z^{-n} = Z \left[\frac{\partial}{\partial a} f(nT_e, a) \right]$$

$$\text{Exemple : calculer } Z \left[\frac{1}{(p+a)^2} \right] = \frac{T_e e^{-aT_e} z}{(z - e^{-aT_e})^2}$$

$$\text{sachant que : } Z \left[\frac{1}{p+a} \right] = \frac{z}{z - e^{-aT_e}}$$

9.14 Théorème de Parseval

$$\sum_{n=0}^{\infty} [f(nT_e)]^2 = \frac{1}{2\pi j} \oint_c z^{-1} F(z) F(z^{-1}) dz$$

Preuve : on utilise la formule d'inversion.

9.15 Théorème de convolution discrète

Soient deux fonctions et leurs transformées en Z :

$$F_1(z) = Z[f_1(t)] = \sum_0^{\infty} f_1(nT_e) z^{-n} \quad \text{et} \quad F_2(z) = Z[f_2(t)] = \sum_0^{\infty} f_2(nT_e) z^{-n}$$

$$\text{Alors : } F_1(z) \cdot F_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} f_1(nT_e) f_2(kT_e) z^{-(n+k)}$$

Posons $m = n + k$

$$\begin{aligned} F_1(z) F_2(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=n}^{\infty} f_1(nT_e) f_2[(m-n)T_e] z^{-m} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f_1(nT_e) f_2[(m-n)T_e] z^{-m} \end{aligned}$$

car : $f_2[(m-n)T_e] = 0$ pour $m < n$.

$$\text{Posons : } C(mT_e) = \sum_{n=0}^{\infty} f_1(nT_e) f_2[(m-n)T_e] \quad \text{et } t = mT_e$$

$$C(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_1(nT_e) f_2(t - nT_e) \text{ produit de convolution discrète}$$

$$\text{On a : } F_1(z) F_2(z) = \sum_{m=0}^{\infty} C(mT_e) z^{-m} = Z[C(t)]$$

$$\text{D'où : } F_1(z) F_2(z) = Z \left[\sum_{n=0}^{\infty} f_1(nT_e) f_2(t - nT_e) \right]$$

C'est-à-dire :

$$F_1(z) \cdot F_2(z) = Z[f_1(t) * f_2(t)]$$

N.B. : En fait, la sommation n'est pas infinie, mais s'arrête à $nT_e = t$ (causalité de f_2).

Chapitre 10

Traitement de signal analogique

10.1 Introduction

10.1.1 Définitions

Un signal est le support physique (**véhicule**) de l'information (onde lumineuse, son, signal électrique). Mathématiquement, on le représente par une **fonction** (du temps t , de l'espace) dont on étudie les variations (dans le domaine temporel ou fréquentiel ν). On s'intéresse ici au cas de signaux **mono-dimensionnels** $f(t)$ (une seule variable). Si la variable est continue, on parle de signal **analogique**. Si la variable est échantillonnée ($t = nT_e$), on parle de signal **discret**. Si l'amplitude est également discrète (pas de quantification q), on parle de signal **numérique** [33, 27].

Physiquement, on aura toujours affaire à de “bonnes” fonctions : bornée, à support borné, continue dérivable ou satisfaisant les conditions de Dirichlet (discontinuités de 1ère espèce uniquement), intégrable, d'énergie finie ou de puissance moyenne finie, voire distributions tempérées ($f(t) \propto t^n$).

10.1.2 Systèmes analogiques

Un système de communication consiste en la **formation** (émission), la **transmission** et la **détection** (réception) d'un signal. Ces trois étapes sont sujettes à des bruits. On caractérise un système par le **rapport signal sur bruit** (SNR en anglais) et la **bande passante BP** (cf. caractéristiques en automatique : précision, vitesse et stabilité). On considèrera ici un système de traitement et transmission d'information (filtre) qui est **linéaire, continu,**

stationnaire :

$$a_1x_1(t) + a_2x_2(t) \rightarrow a_1y_1(t) + a_2y_2(t) \quad (10.1)$$

$$x(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) \rightarrow y(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(t) \quad (10.2)$$

$$x(t - \tau) \rightarrow y(t - \tau) \quad (10.3)$$

On le caractérise au choix par [37] :

- sa **réponse impulsionnelle** $h(t)$
- sa **fonction de transfert** de Laplace : $H(p) = TL[h(t)]$
- sa fonction de transfert de Fourier : $H(\nu) = TF[h(t)]$
- sa **réponse harmonique** $H(j\omega)$ avec $p = j\omega = j2\pi\nu$

$$e(t) \rightarrow s(t) = h(t) * e(t) \quad (10.4)$$

$$\delta(t) \rightarrow s(t) = h(t) * \delta(t) = h(t) \quad (10.5)$$

$$e^{j\omega t} \rightarrow s(t) = H(j\omega).e^{j\omega t} \quad (10.6)$$

$$E(p) \rightarrow S(p) = H(p).E(p) \quad (10.7)$$

$$E(\nu) \rightarrow S(\nu) = H(\nu).E(\nu) \quad (10.8)$$

En traitement du signal, on préfère la TF à la TL car :

- la fréquence ν a une interprétation physique, contrairement à la variable symbolique p ,
- la TL ne s'applique qu'aux fonctions causales (étude des régimes transitoires), alors que la TF s'applique aussi aux signaux permanents.

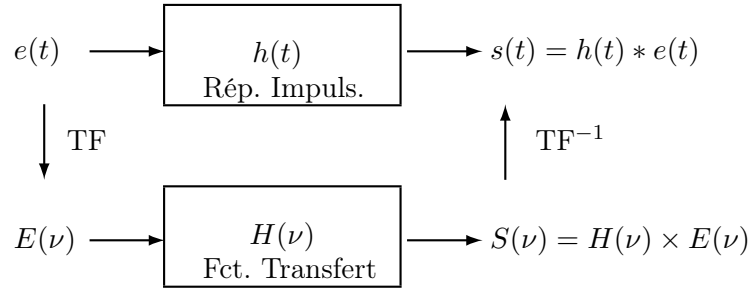


FIGURE 10.1 – Boîte noire (où l'opérateur $*$ représente la convolution).

10.2 Signaux analogiques

10.2.1 Typologie des signaux

- signal d'énergie finie ou signal de puissance moyenne finie

- signal périodique ou signal à support borné
- signal large bande ou signal à bande étroite
- signal réel ou signal complexe (signal analytique).
N.B. : $x(t) \in \mathcal{R} \Rightarrow X(-\nu) = X^*(\nu)$ (où X^* représente le complexe conjugué de X)
- signal certain (déterministe) ou signal aléatoire (probabiliste, avec probabilité $p(x)$)
- signal **ergodique** : moyenne temporelle $\overline{f[x(t)]}$ = moyenne d'ensemble $E[f(x)]$ (espérance mathématique)

$$\overline{f[x(t)]} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f[x(t)] dt \quad (10.9)$$

$$E[f(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)p(x)dx \quad (10.10)$$

10.2.2 Energie et puissance

Le principe de **conservation de l'énergie** se traduit par des relations temps-fréquence :

- pour les signaux d'**énergie finie**, on peut intégrer par rapport à t ou ν sur tout \mathcal{R} :

$$\int_{\mathcal{R}} x(t).y^*(t)dt = \int_{\mathcal{R}} X(\nu).Y^*(\nu)d\nu \quad (10.11)$$

$$P \propto |x(t)|^2 \quad (10.12)$$

$$E = \int_{\mathcal{R}} P dt = \int_{\mathcal{R}} |x(t)|^2 dt = \int_{\mathcal{R}} |X(\nu)|^2 d\nu \quad (10.13)$$

$$DSE = |X(\nu)|^2 \quad (10.14)$$

- pour les signaux de **puissance moyenne finie**, on calcule une moyenne temporelle sur un intervalle fini T , puis on fait le passage à la limite :

$$P_{moy} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{[T]} |x(t)|^2 dt = \overline{|x(t)|^2} \quad (10.15)$$

10.2.3 Corrélation

La corrélation mesure la **ressemblance** entre signaux : si $\forall \tau, \gamma_{xy}(\tau) = 0$ alors les signaux $x(t)$ et $y(t)$ sont non corrélés.

10.2.3.1 Autocorrélation

Si le signal est d'énergie finie :

$$c_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t-\tau)dt \quad (10.16)$$

$$c_x(-\tau) = c_x^*(\tau) \quad (10.17)$$

$$|c_x(\tau)| \leq c_x(0) = \int_{\mathcal{R}} |x(t)|^2 dt = \int_{\mathcal{R}} |X(\nu)|^2 d\nu = E \quad (10.18)$$

$$TF[c_x(\tau)] = C_x(\nu) = |X(\nu)|^2 \quad (10.19)$$

L'Eq. (10.18) constitue le théorème de Parseval.

En cas de puissance moyenne finie, on utilise des moyennes temporelles :

$$\gamma_x(\tau) = \overline{x(t)x^*(t-\tau)} \quad (10.20)$$

$$\gamma_x(-\tau) = \gamma_x^*(\tau) \quad (10.21)$$

$$|\gamma_x(\tau)| \leq \gamma_x(0) = \overline{|x(t)|^2} = P_{moy} = \int_{\mathcal{R}} \Gamma_x(\nu) d\nu \quad (10.22)$$

$$TF[\gamma_x(\tau)] = \Gamma_x(\nu) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X_T(\nu)|^2}{T} \quad (10.23)$$

où $X_T(\nu)$ dénote la TF du signal tronqué : $x_T(t) = x(t) \cdot \Pi_T(t)$.

$\Gamma_x(\nu)$ est la **DSP** moyenne (qui ne se calcule jamais directement, mais par la TFD).

10.2.3.2 Corrélateur analogique

Principe du corrélateur analogique pour signaux de P_{moy} finie : cf. exercice

§13.93.

Exemple : cas de $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$ (voir le démonstrateur Matlab dans le fichier mathEllips0.m en section 16.1).

10.2.3.3 Intercorrélation

Si le signal est d'énergie finie :

$$c_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t-\tau)dt \quad (10.24)$$

$$c_{xy}(-\tau) = c_{xy}^*(\tau) \quad (10.25)$$

$$TF[c_{xy}(\tau)] = X(\nu)Y^*(\nu) \quad (10.26)$$

Si le signal est de puissance moyenne finie :

$$\gamma_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{[T]} x(t) y^*(t - \tau) dt = \overline{x(t) y^*(t - \tau)} \quad (10.27)$$

$$\gamma_{xy}(-\tau) = \gamma_{xy}^*(\tau) \quad (10.28)$$

$$TF[\gamma_{xy}(\tau)] = \Gamma_{xy}(\nu) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{X_T(\nu) Y_T^*(\nu)}{T} \quad (10.29)$$

La correspondance temps-fréquence donnée par l'Eq. (10.29) constitue le théorème de Wiener-Khintchine. $\Gamma_{xy}(\nu)$ est la DSP croisée.

10.2.4 Dualité temps-fréquence

Soit un signal réel $x(t)$ d'énergie finie E .

10.2.4.1 Durée utile - Support borné

La puissance instantanée vaut : $x^2(t)$. On définit la durée utile $T_u = t_1 - t_0$ de deux façons équivalentes :

$$\int_{t_0}^{t_1} x^2(t) dt = (1 - \epsilon) E \quad (\text{où typ. } \epsilon = 10\%) \quad (10.30)$$

$$\forall t \quad | \quad t < t_0 \text{ ou } t > t_1, \quad x^2(t) < \frac{\max_{t \in \mathcal{R}} x^2(t)}{2}$$

(soit une atténuation de puissance de -6dB).

Pour un signal de P_{moy} finie, $T_u = \infty$.

Le cas d'un signal à support borné correspond à $\epsilon = 0$ dans l'Eq. (10.30).

10.2.4.2 Spectre utile - Spectre borné

On définit $F_u = F_{max} - F_{min}$ (avec $F_{min} = -F_{max}$) tel que :

$$\int_{F_{max}}^{\infty} |X(\nu)|^2 d\nu < \frac{\epsilon}{2} E \iff \int_{F_{min}}^{F_{max}} |X(\nu)|^2 d\nu \geq (1 - \epsilon) E \quad (10.31)$$

Pour un signal de P_{moy} finie, on définit F_u avec la DSP $\Gamma_x(\nu)$.

Cas d'un signal à spectre borné :

si $X(\nu)$ est négligeable pour $\nu \notin [F_{min}, F_{max}]$, c'est-à-dire :

$$\exists M, \quad \int_{F_{min}}^{F_{max}} |X(\nu)| d\nu = M \quad (10.32)$$

alors toutes les dérivées du signal sont bornées (théorème de Bernstein) :
 $|x^{(n)}(t)| \leq (2\pi F_{max})^n M$.

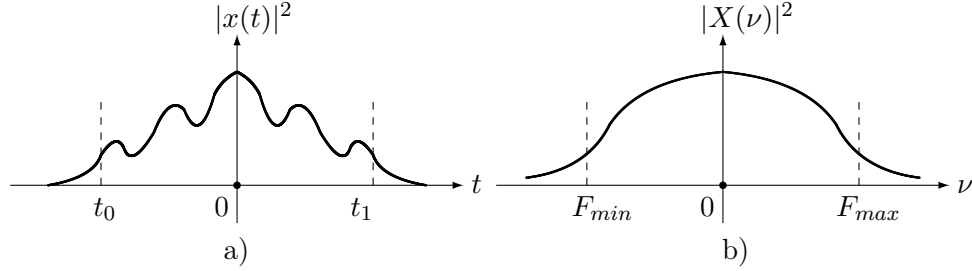


FIGURE 10.2 – a) Durée utile ; b) Spectre utile.

10.2.4.3 Principe d'incertitude

On a la relation : $F_u T_u \geq \frac{1}{\pi}$

10.2.5 Signal à bande étroite

10.2.5.1 Définition

- Signal $x(t)$ réel tel que : $|X(\nu)| = 0$ au voisinage de $|\nu| = 0$.
- On définit le spectre utile $\Delta\nu$ au voisinage de F_0 (intérêt si $\Delta\nu \ll F_0$)
- Spectre : $X(\nu) = \frac{1}{2}[X_+(\nu) + X_-(\nu)] = \frac{1}{2}[X_+(\nu) + X_+^*(-\nu)]$

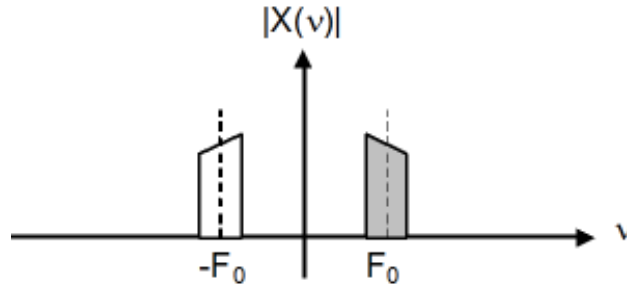


FIGURE 10.3 – Spectre d'un signal à bande étroite.

10.2.5.2 Signal analytique

On montre qu'on peut écrire : $x(t) = \Re[x_+(t)] = \frac{1}{2}[x_+(t) + x_+^*(t)]$
 $x_+(t) = x_0(t)e^{j2\pi F_0 t}$: signal analytique (HF)

$$X_+(\nu) = X_0(\nu) * \delta(\nu - F_0) = X_0(\nu - F_0)$$

$x_0(t) = m(t)e^{j\phi(t)}$ est l'enveloppe BF complexe de $x(t)$

$e^{j2\pi F_0 t}$ est la porteuse

$x(t) = m(t) \cos[2\pi F_0 t + \phi(t)]$: signal modulé en amplitude par $m(t) \in \mathbb{R}^+$, et en phase par $\phi(t)$.

10.3 Filtres analogiques

10.3.1 Convolution

10.3.1.1 Calcul de la sortie d'un filtre

La sortie $s(t)$ d'un filtre est la convolution de l'entrée $e(t)$ par la réponse impulsionnelle $h(t)$: $s(t) = h(t) * e(t)$.

Un produit de convolution est une intégrale "compliquée" :

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)y(t-u)du.$$

Interprétation graphique : retournement et décalage d'une des fonctions, produit avec l'autre fonction et sommation des aires sous la courbe produit.

La transformée $H(\nu)$ de la réponse impulsionnelle s'appelle la fonction de transfert du filtre.

Intérêt principal : un produit de convolution se transforme en produit simple : $S(\nu) = H(\nu).E(\nu)$

10.3.1.2 Chaînage de filtres

La convolution est commutative, donc l'ordre des filtres est indifférent, mais attention aux impédances (solution : étages séparateurs ou même impédance caractéristique).

$$s(t) = [h_1(t) * h_2(t) * \dots * h_n(t)] * e(t) = h(t) * e(t) \quad (10.33)$$

$$S(\nu) = [H_1(\nu).H_2(\nu) \dots H_n(\nu)]E(\nu) = H(\nu) \cdot E(\nu) \quad (10.34)$$

Exemple : pour obtenir la réponse impulsionnelle $h(t)$ d'un filtre, on peut mettre en entrée un échelon (dit de Heaviside) $e(t) = \mathcal{U}(t)$ puis dériver la sortie :

$$s(t) = h(t) * \mathcal{U}(t) \Rightarrow s'(t) = \underbrace{[h(t) * \mathcal{U}(t)]}_{s(t)} * \delta'(t) = h(t) * \mathcal{U}'(t) = h(t) * \delta(t) = h(t)$$

10.3.2 Réponse impulsionnelle et fonction de transfert

Un filtre est caractérisé soit par sa réponse impulsionnelle $h(t)$, soit par ses fonctions de transfert (en module et en argument) : $H(p)$ (pour les signaux causaux uniquement) ou $H(\nu) = |H(\nu)| \exp[j\Phi(\nu)]$. §13.61

Il produit une distorsion linéaire du signal :

- si $|H(\nu)| \neq \text{cte}$, on a une distorsion d'amplitude
- si $\Phi(\nu) \neq k\nu$ avec $k = \text{cte}$, on a distorsion de phase (œil sensible à la distorsion de phase contrairement à l'oreille).
- filtre à phase minimum : ni pôle, ni zéro avec $\Re(p) > 0$
- filtre sans distorsion linéaire si :

$$e(t) \longrightarrow s(t) = Ae(t - \tau) = e(t) * [A\delta(t - \tau)].$$

$$\text{Donc : } h(t) = A\delta(t - \tau) \leftrightarrow H(\nu) = Ae^{-j2\pi\tau\nu}$$

10.3.2.1 Filtre réalisable

Il doit respecter le principe de causalité, c'est-à-dire que sa réponse impulsionnelle ne démarre pas avant l'instant $t = 0$ (Fig. 10.4a).

$$\text{CNS : } h(t) = 0 \text{ pour } t < 0 \Rightarrow H(p) \quad \exists.$$

10.3.2.2 Filtre stable

Toute entrée bornée doit donner une sortie bornée :

$$|e(t)| < M \Rightarrow |s(t)| < M'.$$

CNS : $\int_{\mathcal{R}} |h(t)| dt \quad \exists \quad \Rightarrow \quad |H(\nu)| \text{ borné et } |H(p)| \text{ borné avec pôles tels que } \Re(p) < 0$ (Fig. 10.4b).

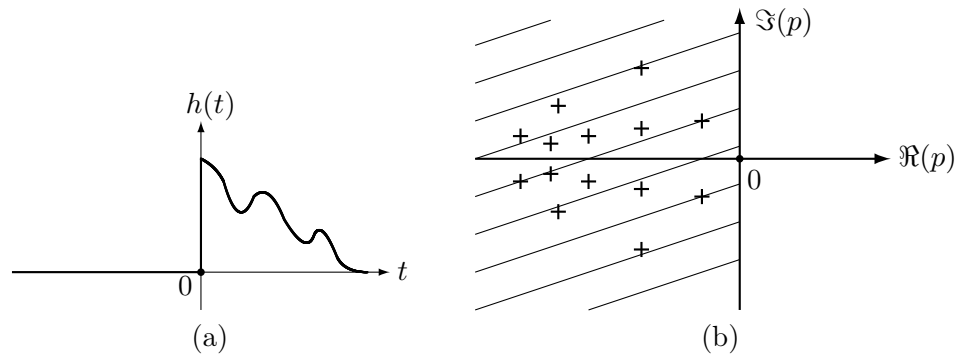


FIGURE 10.4 – a) causalité; b) stabilité.

10.3.2.3 Filtres idéaux

— **Ampli** : réalisable et stable

$$s(t) = A.e(t) = e(t) * [A\delta(t)] \Rightarrow h(t) = A\delta(t) \Rightarrow H(\nu) = A$$

— **Retard pur** : réalisable et stable

$$s(t) = e(t - \tau) = e(t) * \delta(t - \tau) \Rightarrow h(t) = \delta(t - \tau) \Rightarrow H(\nu) = e^{-j2\pi\tau\nu}$$

— **Passe-bas** (Fig. 10.5) : pas stable, pas réalisable

$$H(\nu) = \Pi_{2F_c}(\nu) \Rightarrow h(t) = 2F_c \text{sinc}(2\pi F_c t)$$

Approximation possible avec $0 < \varepsilon \ll 1$ et $n \gg 1$:

$$H(\nu) = \frac{1}{1 + \varepsilon \left(j \frac{\nu}{F_c} \right)^n}$$

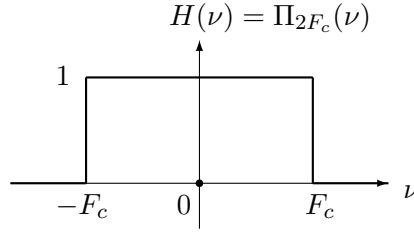


FIGURE 10.5 – Filtre passe-bas.

— **Dérivateur** : réalisable, mais pas stable

$$s(t) = e'(t) = e(t) * \delta'(t) \Rightarrow h(t) = \delta'(t) \Rightarrow H(\nu) = j2\pi\nu$$

— **Intégrateur** : réalisable, mais pas stable

$$s(t) = \int_{-\infty}^t e(u) du = e(t) * \mathcal{U}(t) \Rightarrow h(t) = \mathcal{U}(t) \Rightarrow H(\nu) = \frac{1}{j2\pi\nu} + \frac{1}{2}\delta(\nu)$$

10.3.3 Relations fondamentales des filtres

Le filtre (conçu, donc forcément d'énergie finie !) est caractérisé par sa fonction d'autocorrélation et sa DSE :

$$c_h(\tau) = \int_{\mathcal{R}} h(t) h^*(t - \tau) dt \quad (10.35)$$

$$TF[c_h(\tau)] = |H(\nu)|^2 \quad (10.36)$$

Alors la sortie est caractérisée par les relations suivantes :

Si le signal d'entrée est d'énergie finie :

$$c_s(\tau) = c_h(\tau) * c_e(\tau) \quad (10.37)$$

$$|S(\nu)|^2 = |H(\nu)|^2 \cdot |E(\nu)|^2 \quad (10.38)$$

$$E_s = c_s(0) = \int_{\mathcal{R}} |H(\nu)|^2 \cdot |E(\nu)|^2 d\nu = \int_{\mathcal{R}} |S(\nu)|^2 d\nu \quad (10.39)$$

Si le signal d'entrée est de puissance moyenne finie :

$$\gamma_s(\tau) = c_h(\tau) * \gamma_e(\tau) \quad (10.40)$$

$$TF[\gamma_s(\tau)] = \Gamma_s(\nu) = |H(\nu)|^2 \cdot \Gamma_e(\nu) \quad (10.41)$$

$$Ps_{moy} = \int_{\mathcal{R}} |H(\nu)|^2 \cdot \Gamma_e(\nu) d\nu \quad (10.42)$$

10.3.4 Filtre à bande étroite

10.3.4.1 Définition

Filtre dont la réponse impulsionnelle est un signal à bande étroite.

- $h(t) = \Re[h_+(t)] = \Re[h_0(t)e^{j2\pi F_0 t}]$
- $H(\nu) = \frac{1}{2}[H_+(\nu) + H_-(\nu)] = \frac{1}{2}[H_0(\nu - F_0) + H_0^*(-\nu - F_0)]$
- Le filtre passe-bande idéal n'est pas réalisable :
 $H(\nu) = \Pi_{\Delta\nu}(\nu - F_0) + \Pi_{\Delta\nu}(\nu + F_0)$
- relation entrée-sortie : $s(t) = h(t) * e(t)$ avec $e(t)$ à BE
- $S(\nu) = \frac{1}{4}[E_+(\nu) + E_-(\nu)][H_+(\nu) + H_-(\nu)] = \frac{1}{2}[S_+(\nu) + S_-(\nu)]$
- $S_+(\nu) = \frac{1}{2}E_0(\nu - F_0)H_0(\nu - F_0) = \frac{1}{2}E_0(\nu)H_0(\nu) * \delta(\nu - F_0)$
 $\Rightarrow S_0(\nu) = \frac{1}{2}E_0(\nu)H_0(\nu)$
- spectre de la sortie : $S(\nu) = \frac{1}{2}[S_0(\nu - F_0) + S_0^*(-\nu - F_0)]$
- le signal de sortie est à BE : $s(t) = \Re[s_0(t)e^{j2\pi F_0 t}]$

10.3.4.2 Principe du changement de fréquence

On multiplie un signal à BE $x(t) = \Re[x_0(t)e^{j2\pi F_0 t}]$ avec un oscillateur local $y(t) = \cos(2\pi F_L t)$.

On a en sortie du multiplieur : $z(t) = \alpha x(t)y(t) \Rightarrow Z(\nu) = Z_1(\nu) + Z_2(\nu)$

Avec : $Z_1(\nu) = \frac{\alpha}{4}[X_0(\nu - (F_0 + F_L)) + X_0^*(-\nu - (F_0 + F_L))]$

$$\leftrightarrow z_1(t) = \frac{\alpha}{2}\Re[x_0(t)e^{j2\pi(F_0+F_L)t}]$$

Et : $Z_2(\nu) = \frac{\alpha}{4}[X_0(\nu - (F_0 - F_L)) + X_0^*(-\nu - (F_0 - F_L))]$

$$\leftrightarrow z_2(t) = \frac{\alpha}{2}\Re[x_0(t)e^{j2\pi(F_0-F_L)t}]$$

Puis on applique un filtre passe-bande centré sur $F_0 + F_L$. On obtient alors en sortie du filtre : $w(t) = z_1(t)$.

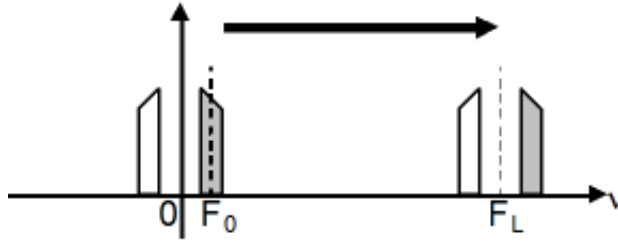


FIGURE 10.6 – Changement de fréquence.

10.3.4.3 Ampli sélectif accordable

Utilisation d'un filtre passe-bande centré en F_I (fréquence intermédiaire) et de BP $\Delta\nu$. On fait varier F_L alors que $F_I = \text{cte}$. Seuls passent les signaux $x_i(t)$ tels que : $F_i - F_L = F_I \Rightarrow \boxed{F_i = F_I + F_L}$.
Utilisé dans les récepteurs radio hétérodynes.

10.3.4.4 Multiplexage en fréquence

Le signal de parole est un signal à bande étroite.
Application aux signaux téléphoniques : BP : $[f_{\min} = 300\text{Hz}; f_{\max} = 3400\text{Hz}]$

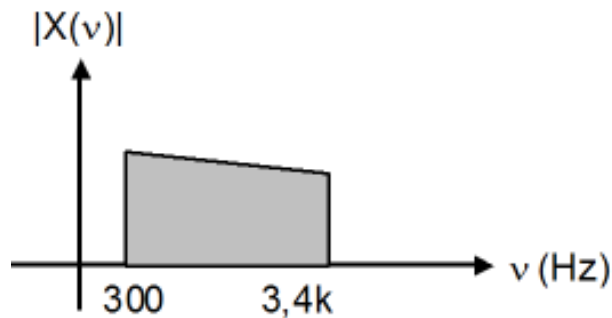


FIGURE 10.7 – Spectre du signal de parole.

On multiplie chaque signal par un oscillateur local de fréquence différente F_L .

On ajoute un filtre passe-bande centré en $\pm \left(F_L + \frac{f_{max} + f_{min}}{2}\right)$ et de largeur : $\Delta\nu = f_{max} - f_{min}$.

Pour mélanger plusieurs signaux, on utilise plusieurs fréquences locales F_K bien choisies.

Pour que les spectres soient disjoints, il faut avoir :

$$F_K + f_{max} < F_L + f_{min} \Rightarrow F_L - F_K > f_{max} - f_{min} = \Delta\nu = 3.1kHz$$

En fait, on prend une marge de sécurité : le standard des PTT utilise : $F_L - F_K = 4kHz$. Sur un câble téléphonique, il passe 2700 voies. Le signal multiplexé est l'ensemble des signaux. Le spectre s'étale jusqu'à 12MHz.

Restitution : on remultiplie par le même oscillateur local adhoc et on applique un filtre passe-bas pour éliminer la fréquence double $2F_L$.

10.4 Applications

10.4.1 Filtrage

Intérêt : Débruitage, Extraction de signaux. §13.68

10.4.1.1 Passe-bas (intégrateur)

Exemple du filtre RC 1er ordre (voir Fig. 10.8a). §13.89

10.4.1.2 Passe-haut (dérivateur)

Exemple du filtre CR 1er ordre (voir Fig. 10.8b)

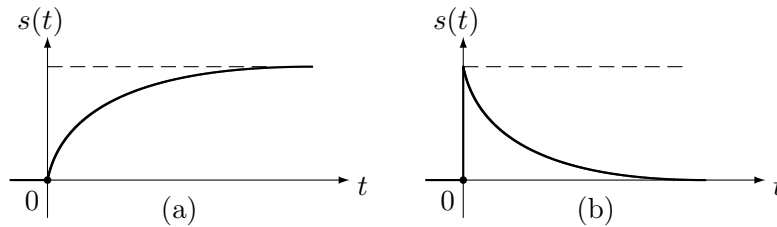


FIGURE 10.8 – Réponse indicielle (à un échelon) : a) Passe-bas ; b) Passe-haut.

10.4.1.3 Passe-bande

voir Signaux à bande étroite.

10.4.2 Modulation

Les signaux qui transportent l'information ont un spectre limité : $f_{min} < \nu < f_{max}$. Pour envoyer plusieurs signaux dans la même direction (même câble ou radio), on rend les spectres disjoints en faisant des signaux à BE concentrés autour de différentes porteuses $F_0 \gg f_{max}$.

Intérêt : Porter de l'information.

10.4.2.1 Modulation d'amplitude

Un signal modulé en amplitude s'exprime par :

$$s(t) = [1 + Km(t)]p(t) \quad (10.43)$$

où :

- K est le taux de modulation variable de 0 à 100% (typ. $K = 50\%$)
- $m(t)$ est le signal BF modulant contenant l'information (où $\nu < f_{max}$).
- $p(t)$ est la porteuse HF : $p(t) = A_p \cos 2\pi f_p t$ (où $f_p \gg f_{max}$).

Prenons ici le cas d'école : $m(t) = \cos 2\pi f_m t$.

Alors : $s(t) = \Re[A_p(1 + K \cos(2\pi f_m t))e^{j2\pi f_p t}]$

On obtient trois raies fréquentielles : f_p , $f_p - f_m$ et $f_p + f_m$.

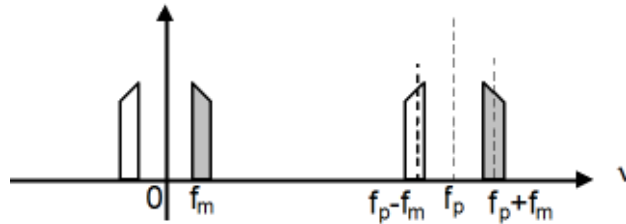


FIGURE 10.9 – Spectre en modulation d'amplitude.

10.4.2.2 Démodulation

On utilise un détecteur d'enveloppe (circuit Diode + RC). Un bon fonctionnement correspond à une valeur de constante de temps $\tau = RC$ telle que :

$$\frac{1}{f_p} \ll \tau \ll \frac{1}{f_{max}}$$

Démonstration cf. TD ??

10.4.2.3 Modulation de fréquence

10.4.2.3.1 Fréquence instantanée : Soit $s(t) = A \cos \phi(t)$.

On appelle fréquence instantanée : $F(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi(t)}{dt}$.

Un signal est modulé en fréquence si : $F(t) = F_0 + \Delta F \cdot m(t)$ où $m(t)$ est le signal modulant et ΔF l'excursion en fréquence.

Dans le cas d'école où : $m(t) = \cos \omega t = \cos 2\pi f t$, alors :

$$\phi(t) = 2\pi F_0 t + \frac{\Delta F}{f} \sin 2\pi f t.$$

$m = \frac{\Delta F}{f}$ est l'indice de modulation.

10.4.2.3.2 Spectre : Le spectre n'est pas borné, mais fait intervenir les fonctions de Bessel $J_n(m)$.

(N.B. : $\lim_{n \rightarrow \infty} |J_n(m)| = 0$)

$\Delta\nu = 2(f_{max} + \Delta F)$

On prend en général : $m_{min} = \frac{\Delta F}{f_{max}} > 2$ (typ. $m_{min} = 5$).

Signal musical monophonique : $30Hz < f < 15kHz \Rightarrow \Delta F = 75kHz$. Donc $\Delta\nu = 180kHz$ (prend plus de place qu'en AM.)

10.4.2.3.3 Réalisation : oscillateur commandé en tension (VCO) fait avec une diode varactor (cf. oscillateur LC accordé à : $\omega = 1/\sqrt{C(t)L}$)

10.4.2.3.4 Démodulation : détecteur quadratique, détecteur de Foster-Seeley.

10.4.3 Analyse spectrale

10.4.3.1 But

Extraire de l'info sur les fréquences (et les énergies correspondantes) présentes dans un signal.

10.4.3.2 Principe

Filtrer le signal à travers un filtre passe-bande très sélectif et accordable (i.e. dont on fait varier la fréquence centrale).

Cas d'un filtre passe-bande idéal centré en F_0 et de bande étroite $\Delta\nu$: $H_+(\nu) = \Pi_{\Delta\nu}(\nu - F_0)$.

Des relations des filtres Eq. (10.38) et (10.41), on déduit que :

$$E_s = 2 \int_0^\infty |H(\nu)|^2 \cdot |E(\nu)|^2 d\nu = 2 \int_{F_0 - \Delta\nu/2}^{F_0 + \Delta\nu/2} |E(\nu)|^2 d\nu \quad (10.44)$$

Si $E(\nu) \approx cte = E(F_0)$ sur $\Delta\nu$, alors :

$$E_s \approx 2\Delta\nu |E(F_0)|^2 \quad (10.45)$$

$$P_{moy} \approx 2\Delta\nu \Gamma_e(F_0) \quad (10.46)$$

10.4.3.3 Mise en œuvre

Accord $F_0 = F_I - F_L$ par changement de fréquence : oscillateur local F_L variable, et filtre sélectif fonctionnant à fréquence intermédiaire fixe $F_I = cte$ ($0 < F_L < F_I$).

On peut ainsi analyser dans la gamme de fréquences : $0 < \nu < F_I$.

10.4.3.4 Résolution fréquentielle

10.4.3.4.1 Pouvoir de résolution : La précision augmente quand $\Delta\nu$ diminue.

$$F_0 - \Delta F < \nu < F_0 + \Delta F$$

$$\boxed{\Delta F = \frac{\Delta\nu}{2}}$$

10.4.3.4.2 Troncature temporelle : La mesure à la fréquence $\nu = F_0$ se fait sur une durée d'observation T :

$$x_T(t) = x(t) \cdot \Pi_T(t)$$

Si $TF_0 \gg 1$ et si l'on néglige les lobes secondaires du sinus cardinal, alors on obtient :

$$\Delta F = \frac{1}{T} + \frac{\Delta\nu}{2} \quad (10.47)$$

En général, on choisit $1/T \approx \Delta\nu/2$. §13.92

10.4.3.4.3 Exemple des audio-fréquences : ($\nu < 20kHz$). On veut une précision de $\Delta F = 100Hz \Rightarrow T_{min} = 20ms$.

Nb de points de mesure : $N = \frac{20kHz}{100Hz} = 200$

Temps de mesure : $T_{obs} = 200T_{min} = 4sec$

Si on réduit le temps de mesure à $T_{min}/10$, alors $\Delta F = 500Hz$, ce qui est déplorable.

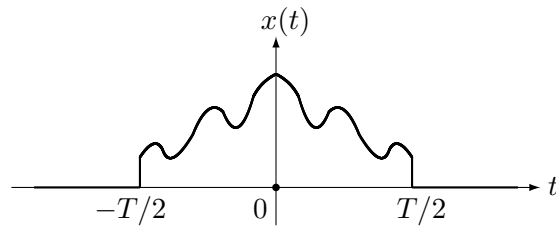


FIGURE 10.10 – Troncature temporelle.

10.5 Signaux aléatoires : caractérisation et filtrage

Variable et fonction aléatoires, Fonction de répartition, Densité de probabilité, Fonction caractéristique, Moments, Processus stationnaires, ergodiques, faiblement stationnaires.

10.6 Bruit

Bruit blanc, Bruit thermique, Facteur de bruit.

10.7 Filtrage optimal et détection

Chapitre 11

Traitement de signal numérique

11.1 Introduction

11.1.1 Généralités

On s'intéresse au cas d'un signal numérique monodimensionnel et causal (suite numérique d'échantillons $x(nT_e)$ pour $n \geq 0$). La variable temporelle est échantillonnée $t = nT_e$ (période d'échantillonnage T_e) et l'amplitude est quantifiée (avec un pas de quantification q). Sans perte de généralité, on prend souvent $T_e = 1$ dans l'étude théorique pour normaliser les échelles. Evidemment, dans la pratique, la valeur de T_e est une caractéristique essentielle d'un système puisqu'elle définit sa cadence de fonctionnement. Entre deux instants d'échantillonnage, le signal n'est pas nul : il est non défini.

On notera indifféremment un signal numérique :

$$x(t) = x(nT_e) = x(n) = x_n.$$

On présente ici les opérations de base sur les signaux numériques, les outils d'analyse et de synthèse des signaux et filtres numériques (TFDT, TFD, TZ et corrélation), les problèmes liés à l'arithmétique utilisée (quantification et cycles limites), enfin les systèmes de traitement [9] et leurs applications (filtrage et analyse spectrale) [27, 6, 41, 17].

11.1.2 Outils mathématiques

11.1.2.1 Transformée de Fourier discrète dans le temps TFDT et spectre

La transformée de Fourier décompose le signal sur la base des exponentielles complexes :

$$X(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \exp(-j2\pi n\nu) \quad (11.1)$$

Cette série converge pour tout signal d'énergie finie :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2 < \infty \quad (11.2)$$

$X(\nu)$ est périodique de période unité (ou période $F_e = \frac{1}{T_e}$ si non normalisé). Son DSF donne la transformée inverse :

$$x(n) = \int_{-1/2}^{+1/2} X(\nu) \exp(+j2\pi\nu n) d\nu \quad (11.3)$$

Si l'on prend en compte T_e , alors l'intégration se fait sur la période principale : $[-F_e/2, F_e/2]$. On appelle **spectres d'amplitude, de phase et d'énergie** resp. $|X(\nu)|$, $\arg[X(\nu)]$ et $|X(\nu)|^2$.

11.1.2.2 TFD et transformée en Z

N.B. : Sur le cercle unité $z = \exp(j2\pi\nu T_e)$, la TZ s'identifie à la TFDT normalisée.

Calcul de la TZ inverse : $x(n) \leftrightarrow X(z)$

- développement en fractions partielles et utilisation des tables
- développement en série de puissance de z^{-1}
- développement par division
- théorème des résidus

N.B. : Propriété complémentaire de la TZ : $x(-n) \leftrightarrow X(1/z)$

11.1.3 Systèmes numériques

11.1.3.1 Equation aux différences

On s'intéresse aux systèmes linéaires (principe de superposition).

Cas particulier de système linéaire régi par une équation aux différences (cf. équation différentielle) :

$$\sum_{i=0}^N a_i(n) s(n-i) = \sum_{j=0}^M b_j(n) e(n-j) \quad (11.4)$$

11.1.3.2 Produit de convolution discret

Le signal de sortie se calcule par convolution discrète :

$$s(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e(k)h(n-k) \quad (11.5)$$

$$S(\nu) = E(\nu)H(\nu) \quad (11.6)$$

$$s(n) = e(n) * h(n) \leftrightarrow S(z) = E(z)H(z) \quad (11.7)$$

11.1.3.3 Fonction de transfert

$$H(z) = TZ[h(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)z^{-n} \quad (11.8)$$

Converge dans un anneau du plan complexe z (cf. critère de Cauchy).

11.2 Signaux numériques**11.2.1 Les 4 opérations de base**

1. somme de signaux numériques
2. produit de signaux
3. multiplication d'un signal par une constante
4. décalage d'un signal (retard ou avance) : $y(n) = x(n - n_0)$

A partir de ces lois, on exprime un signal numérique comme une somme pondérée d'impulsions décalées :

$$f^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT_e)\delta(t - nT_e) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT_e)\delta(t - nT_e) \quad (11.9)$$

11.2.2 Signaux élémentaires et typologie

- impulsion unité $d(n) = 1$ si $n = 0$ (et $d(n) = 0$ sinon) (cf. symbole de Kronecker)
- échelon unité $U(n) = \sum_{k=0}^{\infty} d(n-k)$
- porte ou fenêtre rectangulaire $\Pi_N(n) = U(n) - U(n-N)$
- sinusoïde $x(n) = \sin(\omega n)$
- exponentielle $x(n) = a^n$

- exponentielle complexe $x(n) = \exp[(\alpha + j2\pi\nu)n]$
- signal périodique : $x(n + N) = x(n)$
- signal à durée limitée ou illimitée

11.2.3 Corrélation

Elle mesure la **similitude** entre signaux :

$$\phi_{xy}(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y(n+k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n-k)y(n) = \phi_{yx}(-k) \quad (11.10)$$

$$TF[\phi_{xy}(k)] = \Phi_{xy}(\nu) = X^*(\nu)Y(\nu) \quad (11.11)$$

$$\phi_{xx}(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2(n) = \int_{-1/2}^{+1/2} \Phi_x(\nu) d\nu \quad (11.12)$$

$$\phi_{xy}(k) \leftrightarrow \Phi_{xy}(z) = \sum_n x(n)z^n \sum_m y_m z^{-m} = X(1/z)Y(z) \quad (11.13)$$

11.2.4 Echantillonnage

L'échantillonnée idéale (Fig. 11.1) à la fréquence $F_e = 1/T_e$ est donnée par :

$$v(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) \delta(t - kT_e) \quad (11.14)$$

11.2.4.1 Théorème de Shannon

Le théorème de Shannon stipule qu'il faut respecter la condition :

$$\boxed{F_e > 2F_{max}}.$$

On peut alors reconstituer le signal $x(t)$ par un filtrage passe-bas idéal de fréquence de coupure $f_c = F_e/2$ (interpolation). Dans le cas contraire, on a **repliement de spectre** (cf. Fig. 8.2, p. 122).

11.2.4.2 Echantillonnage naturel

$$w(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Pi_{\tau}(t - kT_e) = x(t) \cdot \left[\Pi_{\tau}(t) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e) \right] \quad (11.15)$$

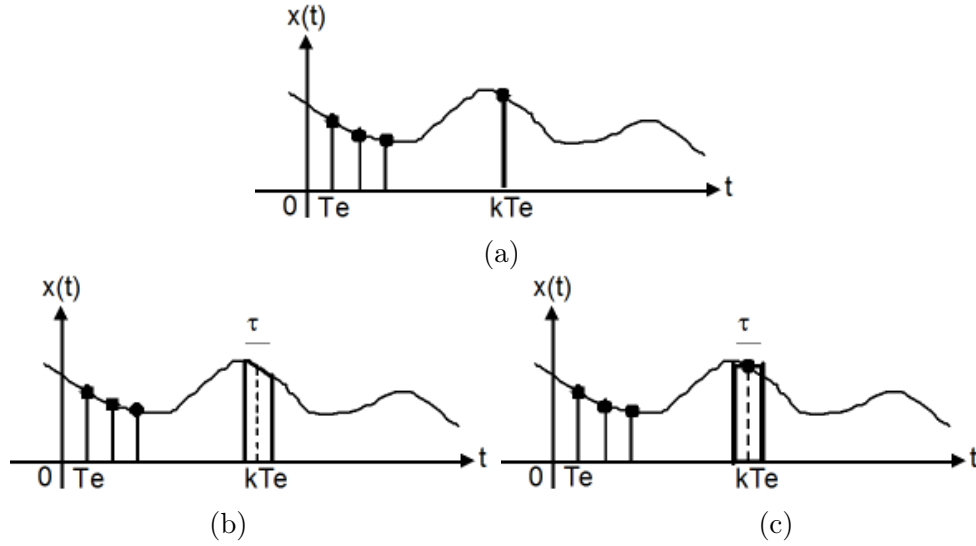


FIGURE 11.1 – a) Echantillonnage idéal; b) Echantillonnage naturel; c) Echantillonneur-bloqueur.

11.2.4.3 Echantillonneur-bloqueur

$$w(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) \Pi_{\tau}(t - kT_e) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) \Pi_{\tau}(t) * \delta(t - kT_e) = \Pi_{\tau}(t) * v(t) \quad (11.16)$$

11.2.5 Quantification

L'influence de la quantification est modélisée par une source de bruit additif. On traite l'erreur de quantification par arrondi comme une variable aléatoire de densité de probabilité uniforme $1/q$ sur l'intervalle des erreurs possibles $[-q/2, +q/2]$:

$$x(n) = Q[x(n)] + b(n) \quad (11.17)$$

$$\mu_b = 0 \quad (11.18)$$

$$\sigma_b^2 = \frac{q^2}{12} \quad (11.19)$$

On définit le rapport signal sur bruit de quantification :

$$\rho = 10 \log_{10} \frac{P_x}{\sigma_b^2}$$

Pour une quantification sur m bits, on montre que $\rho \approx 6m$ dB. On voit donc qu'avec un nombre de bits suffisant, on peut négliger le bruit de quantification.

En revanche, le phénomène des **cycles limites** peut être très gênant : solution périodique en l'absence de signal d'entrée, due notamment aux conditions initiales du filtre.

11.3 Filtres numériques

11.3.1 Causalité et stabilité

$$s(n) = \sum_{k=0}^n e(k)h(n-k) \quad (11.20)$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |h(n)| < \infty \quad (11.21)$$

§13.62

11.3.2 Système SLIT

Un système linéaire invariant dans le temps (SLIT) a pour fonction de transfert une fraction rationnelle en z dont les pôles sont à l'intérieur du cercle unité (Fig. 11.2) :

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{j=0}^M b_j z^{-j}}{\sum_{i=0}^N a_i z^{-i}} \quad (11.22)$$

Il est donc régi dans le domaine temporel par une équation de récurrence linéaire (cf. théorème du retard) : §13.64

$$\sum_{i=0}^N a_i s(n-i) = \sum_{j=0}^M b_j e(n-j) \quad (11.23)$$

Un filtre causal et stable est défini par sa réponse impulsionnelle $h(n)$ ou sa fonction de transfert en z $H(z)$ ou par sa TFD $H(k)$:

$$s(n) = \sum_{k=0}^{N-1} e(k)h(n-k) \quad \text{pour } n \geq N-1 \quad (11.24)$$

$$S(z) = H(z).E(z) \quad (11.25)$$

$$S(k) = H(k).E(k) \quad (11.26)$$

Les Eq. ci-dessus permettent de définir trois méthodes différentes de réalisation d'un filtre numérique : structure réursive (Eq. 11.23), structure transversale (11.24) ou gabarit fréquentiel (11.26). Les circuits comportent des sommateurs, des multiplieurs par une constante et des retards.

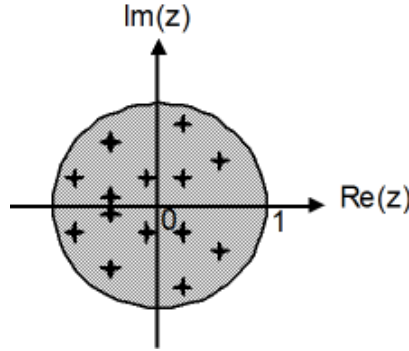


FIGURE 11.2 – Critère de stabilité.

11.3.3 Synthèse d'un filtre RIF

Un filtre à Réponse Impulsionnelle Finie (RIF) a pour fonction de transfert un simple polynôme : $H(z) = B(z)$. On utilise souvent la réalisation transversale (canonique directe) ou une structure en cascade résultant de la factorisation de $H(z)$ en polynômes de deuxième degré :

$$H(z) = \prod_{m=1}^{(N-1)/2} (1 + a_{m1}z^{-1} + a_{m2}z^{-2}) \quad (11.27)$$

Les méthodes de synthèse sont [35] :

- synthèse par série de Fourier : calcul de $h(n)$ à partir de $H(\nu)$ (cf. Eq. 11.3),
- méthode d'échantillonnage en fréquence (emploi de la TFD, mais phénomène de Gibbs),
- optimisation linéaire : algorithme de Remez (contraintes de degré minimal et de phase linéaire, meilleure approximation au sens de Tchebycheff).

Exigence de filtrage :

- gabarit sur l'affaiblissement (ou le gain) : passe-bas, passe-bande, passe-haut, coupe-bande,
- déphasage linéaire : retard de groupe $\tau = d\phi/d\omega = \text{cte.}$

La fonction de transfert vérifie :

$$H(e^{j\omega}) = G(\omega)e^{-j[\phi(0)+\tau\omega]} \quad (11.28)$$

$$H(z^{-1}) = \pm z^{N-1}H(z) \quad (11.29)$$

Donc les zéros apparaissent par paires complexes conjuguées : $z_0, z_0^*, z_0^{-1}, z_0^{*-1}$.

11.3.4 Synthèse d'un filtre RII

1. Transposition analogique (TL) \leftrightarrow numérique (TZ) : correspondance $z \leftrightarrow p$
 — équivalence de la dérivation :

$$y(n) = \frac{x(n) - x(n-1)}{T_e} \quad (11.30)$$

$$p = \frac{1 - z^{-1}}{T_e} \quad (11.31)$$

L'axe imaginaire $p = j\omega$ se transforme en le cercle de centre $z_0 = 1/2$ et de rayon $R = 1/2$. L'équivalence n'est satisfaisante qu'au voisinage de $z = 1$ (suppose une valeur de F_e élevée).

- équivalence de l'intégration (règle trapézoïdale) dite **transformation bilinéaire** : §13.94

$$y(n) = y(n-1) + \frac{x(n) + x(n-1)}{2}T_e \quad (11.32)$$

$$\frac{1}{p} = \frac{T_e}{2} \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}} \quad (11.33)$$

$$f_a = \frac{1}{\pi T_e} \tan(\pi f_d T_e) \quad (11.34)$$

L'image de l'axe imaginaire en p est le cercle unité en z (compatible avec l'échantillonnage, mais loi non linéaire entre fréquence analogique f_a et fréquence numérique f_d).

- échantillonnage de la réponse impulsionnelle :

$$H(p) = \sum_{j=1}^N \frac{\alpha_j}{p - p_j} \Leftrightarrow H(z) = \sum_{j=1}^N \frac{\alpha_j}{1 - \exp(p_j T_e) z^{-1}}$$

2. Algorithmes complexes d'optimisation par ordinateur : minimisation de l'erreur d'approximation entre filtre désiré et filtre réalisable.

11.4 Filtrage

11.4.1 Linéaire

Exemple du filtre passe-bas moyennneur :

$$y(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(n-k)$$

Inconvénient : impossible de supprimer une impulsion tout en conservant fidèlement un échelon.

11.4.2 Non-linéaire

Exemple du filtre médian à l'échelle N :

$$y(n) = \text{med}[x(n-N), x(n-N+1), \dots, x(n+N)]$$

où $\text{med}[\dots]$ représente le nombre qui se trouve au milieu après avoir ordonné les $2N+1$ valeurs par ordre croissant.

Intérêt principal du filtrage non-linéaire : le filtrage par la valeur médiane élimine complètement une impulsion-unité, et laisse passer un échelon sans modification [27].

En pratique, on combine souvent filtre médian et filtre linéaire pour profiter des avantages des deux types de filtres.

11.5 Analyse spectrale

11.5.1 Autocorrélation

Le spectre d'un signal $s(n)$ est la TF de la fonction d'autocorrélation $\phi_s(n)$ du signal :

$$|S(\nu)|^2 = \Phi_s(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \phi_s(n) e^{-j2\pi\nu n} \quad (11.35)$$

La fonction d'autocorrélation de la sortie d'un système est le produit de convolution des fonctions d'autocorrélation de l'entrée et de la réponse impulsionnelle :

$$\phi_s(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \phi_e(n-k) \phi_h(k) \quad (11.36)$$

$$\Phi_s(z) = H(z) H\left(\frac{1}{z}\right) \Phi_e(z) \quad (11.37)$$

$$\text{cf. TS analogique : } \Phi_s(\nu) = |H(\nu)|^2 \Phi_e(\nu) \quad (11.38)$$

La technique dite du corrélogramme est donc un moyen de calculer le spectre d'un signal.

11.5.2 Méthode non-paramétrique

Méthode du périodogramme moyenné : la densité spectrale d'énergie (DSE) est approximée par

$$\hat{\Phi}(k) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi \frac{nk}{N}} \right|^2 \quad (11.39)$$

On calcule donc le module au carré de la TFD du signal (avec l'algorithme rapide de FFT).

Attention :

- troncature temporelle \leftrightarrow choix de fenêtres de pondération (Hanning, Hamming, Blackman) \leftrightarrow **Limite de Résolution fréquentielle**
- Echantillonnage temporel \leftrightarrow Périodisation du spectre \leftrightarrow **Risque de repliement de spectre**

11.5.3 Méthode paramétrique

On modélise le signal comme la sortie d'un filtre RII dont l'entrée est un bruit blanc de variance σ^2 . On parle alors de processus ARMA (*autoregressive - moving average*) :

$$\hat{\Phi}(\nu) = \frac{|B(\nu)|^2}{|A(\nu)|^2} \sigma^2$$

Des algorithmes des moindres carrés permettent d'estimer les paramètres du modèles (coefficients a_i et b_j). Le problème crucial est le choix de l'ordre du processus (degrés du numérateur $B(z)$ et du dénominateur $A(z)$). Intérêt : **Meilleure résolution fréquentielle.**

Chapitre 12

Vade-mecum mathématique

Préambule

Ce chapitre comporte d'une part des rappels élémentaires de mathématiques [12, 23], puis des récapitulatifs et résumés sur les outils avancés qui font l'objet de cet ouvrage (transformations intégrales) [31].

12.1 Trigonométrie

Relation fondamentale : $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

Parité :
$$\begin{aligned}\sin(-\theta) &= -\sin(\theta) \\ \cos(-\theta) &= \cos(\theta)\end{aligned}$$

Symétrie :
$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos \theta \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= -\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \sin \theta \\ \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \cot \theta \\ \cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \tan \theta \\ \cos(\pi - \theta) &= \cos(\pi + \theta) = -\cos \theta \\ \sin(\pi - \theta) &= -\sin(\pi + \theta) = \sin \theta\end{aligned}$$

Angle double :
$$\begin{aligned}\sin 2\theta &= 2 \sin \theta \cos \theta \\ \cos 2\theta &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 1 - 2 \sin^2 \theta \\ \Rightarrow \cos^2 \theta &= \frac{1 + \cos 2\theta}{2} & \sin^2 \theta &= \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \\ \tan 2\theta &= \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}\end{aligned}$$

Addition :

$$\left. \begin{array}{l} \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \\ \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \tan a + \tan b = \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cos b} \\ \tan a - \tan b = \frac{\sin(a-b)}{\cos a \cos b} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} & \tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b} \\ \cot(a+b) = \frac{\cot a \cot b - 1}{\cot a + \cot b} & \cot(a-b) = \frac{1 + \cot a \cot b}{\cot b - \cot a} \end{array}$$

Somme, différence :

$$\begin{array}{l} \sin a + \sin b = 2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \\ \sin a - \sin b = 2 \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \\ \cos a + \cos b = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \\ \cos a - \cos b = -2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \\ \sin(a+b) \sin(a-b) = \cos^2 b - \cos^2 a \\ \cos(a+b) \cos(a-b) = \cos^2 b - \sin^2 a \end{array}$$

Produit, quotient :

$$\begin{array}{l} \sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)] \\ \sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)] \\ \cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) + \cos(a+b)] \\ \cos a \sin b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) - \sin(a-b)] \\ \tan a \tan b = \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{\cos(a-b) + \cos(a+b)} \\ \frac{\tan a}{\tan b} = \frac{\sin(a+b) + \sin(a-b)}{\sin(a+b) - \sin(a-b)} \end{array}$$

Autres relations :

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + \tan^2 \theta \quad \frac{1}{\sin^2 \theta} = 1 + \cot^2 \theta$$

Soit : $t = \tan \frac{\theta}{2}$, alors :

$$\cos \theta = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \sin \theta = \frac{2t}{1+t^2} \quad \tan \theta = \frac{2t}{1-t^2} \quad \cot \theta = \frac{1-t^2}{2t}$$

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$

Formules d'Euler :

$$\cos \theta = \frac{\exp(i\theta) + \exp(-i\theta)}{2} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{\exp(i\theta) - \exp(-i\theta)}{2i}$$

Limite et intégrale usuelles :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2}$$

Expressions du déphasage : On démontre que $\forall (X, Y) \in \mathbb{R}^2$, on peut réécrire :

TABLE 12.1 – Angles remarquables.

θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
sin	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
cos	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0
tan	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
cot	∞	$\sqrt{3}$	1	$1/\sqrt{3}$	0

TABLE 12.2 – Dérivées.

fonction	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\cot x$
dérivée	$\cos x$	$-\sin x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\frac{-1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x$
fonction	$\arcsin x$	$\arccos x$	$\arctan x$	
dérivée	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{1+x^2}$	

TABLE 12.3 – Relations entre fonctions trigonométriques.

	sin	cos	tan	cot
$\sin x =$	$\sin x$	$\pm\sqrt{1 - \cos^2 x}$	$\frac{\pm \tan x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}}$	$\pm \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 x}}$
$\cos x =$	$\pm\sqrt{1 - \sin^2 x}$	$\cos x$	$\pm \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 x}}$	$\pm \frac{\cot x}{\sqrt{1 + \cot^2 x}}$
$\tan x =$	$\frac{\sin x}{\pm\sqrt{1 - \sin^2 x}}$	$\frac{\pm\sqrt{1 - \cos^2 x}}{\cos x}$	$\tan x$	$\frac{1}{\cot x}$
$\cot x =$	$\frac{\pm\sqrt{1 - \sin^2 x}}{\sin x}$	$\frac{\cos x}{\pm\sqrt{1 - \cos^2 x}}$	$\frac{1}{\tan x}$	$\cot x$

$$X \sin \Theta + Y \cos \Theta = K \sin(\Theta + \Psi) = K[\sin \Theta \cos \Psi + \cos \Theta \sin \Psi]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} K \cos \Psi = X \\ K \sin \Psi = Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K^2 = X^2 + Y^2 \\ \tan \Psi = Y/X \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K = \sqrt{X^2 + Y^2} \\ \Psi = \arctan Y/X \end{cases}$$

On peut aussi réécrire : $X \sin \Theta + Y \cos \Theta = A \cos(\Theta + \Phi)$

avec : $A = \sqrt{X^2 + Y^2} = K$ et $\Phi = -\arctan X/Y$.

§13.1 **§13.79**

12.2 Développements limités au voisinage de zéro

Soit une fonction $\varepsilon(x)$ telle que : $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0}$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n \varepsilon(x)$$

$$a^x = 1 + \frac{x \ln a}{1!} + \frac{(x \ln a)^2}{2!} + \cdots + \frac{(x \ln a)^n}{n!} + x^n \varepsilon(x) \quad \text{car } a^x = \exp(x \ln a)$$

$$(1+x)^r = 1 + \frac{rx}{1!} + \frac{r(r-1)x^2}{2!} + \cdots + \frac{r(r-1) \cdots (r-p+1)x^p}{p!} + \cdots$$

$$+ \cdots + \frac{r(r-1) \cdots (r-n+1)x^n}{n!} + x^n \varepsilon(x)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 \cdots + (-1)^n x^n + x^n \varepsilon(x)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 \cdots + x^n + x^n \varepsilon(x)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + x^n \varepsilon(x)$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \cdots - \frac{x^n}{n} + x^n \varepsilon(x)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2} \varepsilon(x)$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2} \varepsilon(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1} \varepsilon(x)$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1} \varepsilon(x)$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + x^8 \varepsilon(x)$$

$$\tanh x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + x^8 \varepsilon(x)$$

$$\cot x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + x^4 \varepsilon(x)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + x^{2n+2} \varepsilon(x)$$

$$\arg \tanh x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + x^{2n+2}\varepsilon(x)$$

$$\begin{aligned} \arcsin x &= x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \cdots \\ &+ \cdots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \cdots (2n)} \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + x^{2n+2}\varepsilon(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \arg \sinh x &= x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \cdots \\ &+ \cdots + \frac{(-1)^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \cdots (2n)} \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + x^{2n+2}\varepsilon(x) \end{aligned}$$

12.3 Décomposition des fractions rationnelles

Soit une fraction $F(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$. §13.6

1. **Chercher la partie entière : si $n \geq m$**

2. **Pôle réel simple :** $F(x) = \frac{P(x)}{(x-a)Q(x)}$ avec $Q(a) \neq 0$

Forme de la décomposition : $F(x) = \frac{A}{x-a} + \cdots$ où :

$$\boxed{A = (x-a) F(x) \mid_{x=a}}$$

Autre méthode (si fraction compliquée) : $\boxed{A = \frac{P(a)}{Q'(a)}}$

3. **Pôle réel multiple :** $F(x) = \frac{P(x)}{(x-a)^k Q(x)}$ avec $Q(a) \neq 0$

Forme de la décomposition : $F(x) = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x-a)^k} + \cdots$

Poser $y = x - a \rightarrow F = \frac{P_1(y)}{y^k Q_1(y)}$.

On divise $P_1(y)$ par $Q_1(y)$ selon les puissances **croissantes** à l'ordre $k-1$.

4. **Pôles complexes conjugués :**

$$F(x) = \frac{P(x)}{(x^2 + px + q)^k Q(x)} \text{ avec } \begin{cases} p^2 - 4q < 0 \\ (a, \bar{a}) \in \mathbb{C}^2 \text{ racines de } x^2 + px + q \\ Q(a) \neq 0 \end{cases}$$

(a) $k = 1$

On décompose dans \mathbb{C} et on regroupe les 2 termes obtenus (car $B = \bar{A}$)

Forme de la décomposition : $F(x) = \left(\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-\bar{a}} \right) + \cdots = \frac{A_1 x + B_1}{x^2 + px + q} + \cdots$

avec : $A_1 = 2\Re[A]$ et $B_1 = -2\Re[A\bar{a}]$

(b) $k \geq 1$, Q simple

On soustrait de F les éléments simples issus de $Q \Rightarrow$ nouvelle fraction simplifiée.

On se ramène à : $F_1(x) = \frac{P_1(x)}{(x^2+px+q)^k}$. On divise P_1 par x^2+px+q (selon les puissances **décroissantes**). Et on recommence.

(c) $k \geq 2$, Q moins simple

Forme de la décomposition :

$$F(x) = \frac{A_1x + B_1}{x^2 + px + q} + \frac{A_2x + B_2}{(x^2 + px + q)^2} + \dots + \frac{A_kx + B_k}{(x^2 + px + q)^k} + \dots$$

On calcule : $(x^2 + px + q)^k F(x) \Big|_{x=a} \Rightarrow \frac{P(a)}{Q(a)} = A_ka + B_k \Leftrightarrow P(a) = Q(a)[A_ka + B_k]$

or $a^2 = -pa - q$ donc on remplace toutes les puissances de a par une combinaison linéaire de 1 et a .

On obtient : $a \times [\text{expression n}^\circ 1 \text{ en } A_k \text{ et } B_k] + 1 \times [\text{expression n}^\circ 2 \text{ en } A_k \text{ et } B_k] = 0$. Or 1 et a forment un système linéaire indépendant

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{expression n}^\circ 1 = 0 \\ \text{expression n}^\circ 2 = 0 \end{cases}$$

On est donc ramené à résoudre un système linéaire en A_k et B_k . On forme ensuite :

$$F(x) - \frac{A_kx + B_k}{(x^2 + px + q)^k} \text{ et on recommence pour avoir } A_{k-1} \text{ et } B_{k-1} \dots$$

N.B. : inutile de déterminer a .

5. Issues de secours

(a) donner à x des valeurs particulières (0 ; 1 ; -1 ...),

(b) calculer $\lim_{x \rightarrow \infty} xF(x)$,

(c) méthode d'identification générale avec coefficients indéterminés,

(d) calculer $(x-a)^k F(x) \Big|_{x=a}$ pour le terme de plus haut degré,

(e) utiliser la parité,

(f) faire une vérification *a posteriori*.

12.4 Fonctions hyperboliques directes

Définitions :

$$\begin{aligned} \cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0 \\ \sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ \tanh x &= \frac{\sinh x}{\cosh x} \\ \coth x &= \frac{1}{\tanh x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos x &= \cosh(ix) \\ \cosh x &= \cos(-ix) \\ \sin x &= -i \sinh(ix) \\ \sinh x &= -i \sin(ix) \end{aligned}$$

fonction	$\sinh x$	$\cosh x$	$\tanh x$	$\coth x$
dérivée	$\cosh x$	$\sinh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$	$\frac{-1}{\sinh^2 x} = 1 - \coth^2 x$

Dérivées :

Trigonométrie hyperbolique : $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

$$\begin{aligned}
 \cosh(a+b) &= \cosh a \cosh b + \sinh a \sinh b \\
 \cosh(a-b) &= \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \\
 \sinh(a+b) &= \sinh a \cosh b + \cosh a \sinh b \\
 \sinh(a-b) &= \sinh a \cosh b - \cosh a \sinh b \\
 \tanh(a+b) &= \frac{\tanh a + \tanh b}{1 + \tanh a \tanh b}
 \end{aligned}$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x = 2 \cosh^2 x - 1 = 1 + 2 \sinh^2 x$$

$$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$$

$$\tanh 2x = \frac{2 \tanh x}{1 + \tanh^2 x}$$

12.5 Fonctions hyperboliques réciproques

Définitions :

$$\begin{aligned}
 y = \arg \sinh x & \quad x \in \mathbb{R} & \Leftrightarrow x = \sinh y & \quad y \in \mathbb{R} \\
 y = \arg \cosh x & \quad x \geq 1 & \Leftrightarrow x = \cosh y & \quad y \geq 0 \\
 y = \arg \tanh x & \quad -1 < x < 1 & \Leftrightarrow x = \tanh y & \quad y \in \mathbb{R} \\
 y = \arg \coth x & \quad x > 1 \text{ (resp. } x < -1) & \Leftrightarrow x = \coth y & \quad y > 0 \text{ (resp. } y < 0)
 \end{aligned}$$

Expressions logarithmiques :

$$\begin{aligned}
 \forall x \in \mathbb{R}, \quad \arg \sinh x &= \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right) \\
 \forall x \geq 1, \quad \arg \cosh x &= \ln \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right) \\
 \forall |x| < 1 \quad \arg \tanh x &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \\
 \forall |x| > 1 \quad \arg \coth x &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right)
 \end{aligned}$$

Dérivées :

$$\begin{aligned}
(\arg \sinh x)' &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \\
(\arg \cosh x)' &= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \\
(\arg \tanh x)' &= \frac{1}{1-x^2} \quad \text{sur }]-1; +1[\\
(\arg \coth x)' &= \frac{1}{1-x^2} \quad \text{sur }]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[
\end{aligned}$$

N.B :

$$\begin{aligned}
\forall x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[, \quad \left(\ln \left| x + \sqrt{x^2-1} \right| \right)' &= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \\
\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \neq 1, \quad x \neq -1, \quad \left(\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \right)' &= \frac{1}{1-x^2}
\end{aligned}$$

12.6 Coniques

Equation polaire : $\boxed{r = \frac{p}{1+e \cos \theta}}$ avec : $\begin{cases} -\pi \leq \theta \leq \pi \\ p > 0 \\ e > 0 \end{cases}$

Selon les valeurs de e , on obtient toutes les coniques :

1. **ellipse :** $0 < e < 1$
2. **parabole :** $e = 1$
3. **hyperbole :** $e > 1$

Equations cartésiennes :

$$\boxed{\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ r^2 = x^2 + y^2 \end{cases}}$$

$$\text{Donc : } r + e r \cos \theta = p \Leftrightarrow r = p - e x$$

$$\Leftrightarrow r^2 = (p - e x)^2$$

$$\Leftrightarrow (1 - e^2) x^2 + y^2 = p^2 - 2p e x$$

1. **si $e = 1$:** $\boxed{y^2 = p^2 - 2p x}$ **parabole**
2. **si $e \neq 1$:**

$$\begin{aligned}
(1 - e^2) \underbrace{\left(x + \frac{p e}{1 - e^2} \right)^2}_X + y^2 &= p^2 + \frac{p^2 e^2}{1 - e^2} = \frac{p^2}{1 - e^2} \\
(1 - e^2) X^2 + y^2 &= \frac{p^2}{1 - e^2} \Leftrightarrow \frac{X^2}{\frac{p^2}{(1 - e^2)^2}} + \frac{y^2}{\frac{p^2}{(1 - e^2)}} = 1
\end{aligned}$$

(a) si $0 < e < 1$: on pose : $a^2 = \frac{p^2}{(1-e^2)^2}$ $b^2 = \frac{p^2}{1-e^2}$

d'où : $\boxed{\frac{X^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$ ellipse

(b) si $e > 1$: on pose : $a^2 = \frac{p^2}{(1-e^2)^2}$ $b^2 = \frac{p^2}{e^2-1}$

d'où : $\boxed{\frac{X^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$ hyperbole

12.7 Rappels élémentaires

Les prérequis mathématiques correspondent au niveau d'entrée à l'université [18].

— Identités remarquables : $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

— Equation du second degré : $x^2 - Sx + P = 0$

— Polynôme caractéristique d'une EDL à coefficients constants :

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_1 r + a_0 = 0$$

— Equation d'une droite de pente a : $y = ax + b$

— Intégration par parties : $\int u'v = [uv] - \int uv'$ §13.85 §13.86

cf. preuve triviale : $(uv)' = u'v + uv'$

— Notion de constante de temps τ : décroissance exponentielle $\exp(-t/\tau)$

12.7.1 Dérivation et intégration

Fonction $f(x)$	Intervalle de dérivabilité	Dérivée $f'(x)$
constante k ($k \in \mathbb{R}$)	\mathbb{R}	0
x^n ($n \in \mathbb{N}^*$)	\mathbb{R}	nx^{n-1}
x^α ($\alpha \in \mathbb{R}$)	$]0; +\infty[$	$\alpha x^{\alpha-1}$
\sqrt{x}	$]0; +\infty[$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$)	$]0; +\infty[$	$\frac{1}{n} \sqrt[n]{x}/x$
$1/x$	\mathbb{R}^*	$-1/x^2$
$1/x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$)	\mathbb{R}^*	$-n/x^{n+1}$
$\ln x$	$]0; +\infty[$	$1/x$
e^x	\mathbb{R}	e^x
$\cos x$	\mathbb{R}	$-\sin x$
$\sin x$	\mathbb{R}	$\cos x$
$\tan x$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$1/\cos^2 x = 1 + \tan^2 x$
<i>A suivre...</i>		

Fonction (suite)	Condition (suite)	Dérivée (suite)
$\cosh x$	\mathbb{R}	$\sinh x$
$\sinh x$	\mathbb{R}	$\cosh x$
$\tanh x$	\mathbb{R}	$1 - \tanh^2 x$
Fonction	Assemblage	Dérivée
$u + v$	addition	$u' + v'$
$u \cdot v$	produit	$u'v + v'u$
λu	multiplication scalaire	$\lambda u'$
$1/u$	inverse	$-u'/u^2$
u/v	quotient	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$
u^n	puissance	$nu'u^{n-1}$
u^α	exposant	$\alpha u' u^{\alpha-1}$
$1/u^n = u^{-n}$	puissance négative	$-n \frac{u'}{u^{n+1}}$
\sqrt{u}	racine	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
e^u	exponentiel	$u'e^u$
$v \circ u$	composition	$u' \times (v' \circ u)$
$\ln \circ u$	logarithme composé	u'/u
$\sin \circ u$	sinus composé	$u' \times (\cos \circ u)$
$\cos \circ u$	cosinus composé	$-u' \times (\sin \circ u)$
$f(x)$	en $x = a$	$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$
$f^{(n)}(x)$	dérivée n-ième	$f^{(n+1)}(x)$

TABLE 12.4: Tableau des dérivées.

Fonction $f(x)$	Condition	Primitive $\int f(x)dx$
a	$a \in \mathbb{R}$	ax
$1/x$		$\ln x $
x^α	$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$	$\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}$
e^{mx}	$m \in \mathbb{R}^*$	$\frac{1}{m} e^{mx}$
$\cos x$		$\sin x$
$\sin x$		$-\cos x$
$\cosh x$		$\sinh x$
$\sinh x$		$\cosh x$
$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$		$\tan x$
$\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \frac{1}{\tan^2 x}$		$-1/\tan x$
$1/\cosh^2 x$		$\tanh x$
A suivre...		

Suite...		
Fonction $f(x)$	Condition	Primitive $\int f(x)dx$
$\frac{x}{1+x^2}$		$\frac{1}{2} \ln(1+x^2)$
$\frac{1}{1+x^2}$		$\arctan x$
$1/\sqrt{1-x^2}$		$\arcsin x$
$1/\sqrt{1+x^2}$		$\arg \sinh x = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$
$\sqrt{1+x^2}$		$\frac{1}{2} \left(x\sqrt{1+x^2} + \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \right)$
$\sqrt{x^2-1}$		$\frac{1}{2} \left(x\sqrt{x^2-1} - \ln x + \sqrt{1+x^2} \right)$
$\sqrt{1-x^2}$		$\frac{1}{2} \left(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin(x) \right)$
$1/\sqrt{x^2-1}$	sur $]1; +\infty[$ sur $] -\infty; -1[$	$\arg \cosh x = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$ $\ln x + \sqrt{x^2-1} $
$\frac{1}{1-x^2}$	$] -1; +1[$ $] -\infty; -1[\cup]1; +\infty[$	$\arg \tanh x = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$ $\frac{1}{2} \ln \left \frac{1+x}{1-x} \right $
$\cos(\omega x + \varphi)$	$\omega \in \mathbb{R}^*, \varphi \in \mathbb{R}$	$\frac{1}{\omega} \sin(\omega x + \varphi)$
$\sin(\omega x + \varphi)$	$\omega \in \mathbb{R}^*, \varphi \in \mathbb{R}$	$-\frac{1}{\omega} \cos(\omega x + \varphi)$
$(ax+b)^r$	$r \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$\frac{1}{(r+1)a} (ax+b)^{r+1}$
$\frac{1}{ax+b}$		$\frac{1}{a} \ln ax+b $
$u' \cdot v$	intég. par parties	$[uv] - \int v' \cdot u$

TABLE 12.5 – Tableau des primitives usuelles.

§13.3 §13.4 §13.7

12.7.2 Unités exprimées en dB

12.7.2.1 Unité de mesure de tension : le dBv

Il s'agit de la mesure en décibels d'une tension, par rapport à une référence V_{ref} de 1 volt efficace :

$$X_{dBv} = 20 \log_{10} \frac{V}{V_{ref}} = 20 \log_{10} V \text{ (si } V \text{ est en volts efficaces)} \quad (12.1a)$$

$$\frac{V}{V_{ref}} = 10^{X_{dBv}/20} \quad (12.1b)$$

12.7.2.2 Unité de mesure de puissance : le dBm

Il s'agit de la mesure en décibels d'une puissance, par rapport à une référence P_{ref} de 1 milliwatt ($10^{-3}W$) :

$$X_{dBm} = 10 \log_{10} \frac{P}{P_{ref}} = 10 \log_{10} P \text{ (si } P \text{ est en mW)} \quad (12.2a)$$

$$P = P_{ref} \times 10^{X_{dBm}/10} \quad (12.2b)$$

12.7.2.3 Unité de gain (en tension ou courant) : en dB

On a : $X_{dB} = 20 \log_{10} \frac{V_s}{V_e}$ où V_s et V_e sont exprimés dans la même unité.

Inversement le ratio vaut : $\frac{V_s}{V_e} = 10^{X_{dB}/20}$. §13.60

12.7.2.4 Remarques

Le coefficient 10 de la formule $X_{dBm} = 10 \log_{10}(P/P_{ref})$ Eq.(12.2a), p.176 est à l'origine du préfixe “déci” de décibel, le “bel” étant le logarithme en base 10 du rapport des puissances. La valeur 20, adoptée dans les dBv, provient d'un souci d'homogénéité puisque la puissance dissipée dans une impédance est proportionnelle au carré de la tension appliquée : $X_{dBm} = 10 \log_{10}(V/V_{ref})^2 = 20 \log_{10}(V/V_{ref}) = X_{dBv}$. Par extension, le coefficient 20 est conservé lorsque les dB servent à exprimer un gain en tension ou en courant.

	dBv	V_{eff}		dBm	mW		dB	ratio
Cas particuliers :	0	1		0	1		0	1
	10	3.16		10	10		3	$\sqrt{2}$
	20	10		20	100		6	2
	-10	0.316		-10	0.1		-3	$1/\sqrt{2}$

12.7.3 Rappel sur les complexes

$$\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|} \quad (12.3)$$

$$\arg \left(\frac{1}{z} \right) = -\arg z \quad (12.4)$$

Soit un quotient complexe : $z = \frac{z_1}{z_2} \in \mathbb{C}$. Alors :

$$|z| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \Rightarrow |z|_{dB} = |z_1|_{dB} + \left| \frac{1}{z_2} \right|_{dB} = |z_1|_{dB} - |z_2|_{dB}$$

et

$$\arg(z) = \arg(z_1) + \arg\left(\frac{1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$$

12.8 Distributions

12.8.1 Définition

On appelle distribution T , une fonctionnelle sur D où D est l'espace vectoriel (EV) des fonctions $\varphi(t)$ à valeurs complexes définies sur \mathbb{R} , **indéfiniment dérivables** et à **support borné**.

$$T : \overset{D}{\varphi} \rightarrow \overset{\mathbb{C}}{\langle T, \varphi \rangle}$$

Exemples : $\langle T_F, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) \varphi(t) dt$

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \langle T_\delta, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \varphi(t) dt = \varphi(0)$$

$$f^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f(t) \delta(t - nT) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) \delta(t - nT)$$

N.B. : Distribution : n'a pas de sens au sens des fonctions (ni de l'intégrale de Riemann).

12.8.2 Distribution de Dirac

Elle est définie par une limite : $\boxed{\delta(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} I_\epsilon(x)}$ où $I_\epsilon(x)$ est une impulsion infiniment courte (durée ϵ) et infiniment haute (amplitude $1/\epsilon$) :

On en déduit :

— la parité : $\delta(x) = \delta(-x)$ et $\delta(x - a) = \delta(a - x)$

— l'intégrale : $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1$

Produit simple :

— distribution pondérée par la valeur de la fonction :

$$\boxed{\delta(x - a)f(x) = \delta(x - a)f(a)}$$

— cas particulier où $a = 0$: $\delta(x)f(x) = \delta(x)f(0)$

Elément neutre de la convolution (preuve par la TL : $H(p) = 1$) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-u)f(u)du = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(u)f(x-u)du = \delta(x) * f(x) = f(x)$$

De même : $\boxed{\delta(x-a) * f(x) = f(x-a)}$

On en déduit les **intégrales** :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)f(x)dx = f(0)$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-a)f(x)dx = f(a)}$$

Dérivée : $f'(x) = f(x) * \delta'(x)$

Dérivée nième : $\boxed{f(x) * \delta^{(n)}(x) = f^{(n)}(x)}$

12.9 Développement en série de Fourier

Soit une fonction $f(t)$:

- périodique de période T
- définie dans un intervalle $[\theta, \theta + T]$,
- satisfaisant les conditions de Dirichlet (discontinuités de 1^{re} espèce).

Alors :

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{2\pi kt}{T} + b_k \sin \frac{2\pi kt}{T}$$

avec :

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{\theta}^{\theta+T} f(t) dt$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{\theta}^{\theta+T} f(t) \cos \frac{2\pi kt}{T} dt$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{\theta}^{\theta+T} f(t) \sin \frac{2\pi kt}{T} dt$$

$$\text{On peut poser : } \begin{cases} a_k &= A_k \cos \varphi_k \\ b_k &= A_k \sin \varphi_k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_k &= \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \\ \varphi_k &= \text{Arctg } \frac{b_k}{a_k} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos \left(\frac{2\pi kt}{T} - \varphi_k \right)$$

Formule de Bessel-Parseval

On a conservation de l'énergie :

$$\frac{1}{T} \int_{\theta}^{\theta+T} [f(t)]^2 dt = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{(a_k^2 + b_k^2)}_{A_k^2}$$

12.10 Tableau récapitulatif de la TL

cf. Tab. 12.6. §13.65 §13.66

12.11 Tableau récapitulatif de la TF

cf. Tab. 12.7. §13.78 §13.81

12.12 Tableau récapitulatif de la TZ

cf. Tab. 12.8.

12.13 Tableau synthétique des transformées

cf. Tab. 12.9.

TABLE 12.6 – Tableau de transformée de Laplace.

Domaine du temps $t \in \mathbb{R}$ où $t > 0$	\xrightarrow{TL} $\xleftarrow{TL^{-1}}$	Domaine de fréquence généralisée $p \in \mathbb{C}$ avec $\Re(p) = \sigma > \sigma_o$
$f(t)$	\supset	$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt \subset f(t)$
df/dt	\supset	$pF(p) - f(0^+)$
$f(t) * g(t)$	\supset	$F(p).G(p)$
$f(0^+)$	$=$	$\lim_{p \rightarrow \infty} pF(p)$
$f(\infty)$	$=$	$\lim_{p \rightarrow 0} pF(p)$
$f(t - t_0)$	\supset	$e^{-pt_0} F(p)$
$e^{-at} f(t)$	\supset	$F(p + a)$
$a.f(at)$	\supset	$F(p/a)$
$f^{(n)}(t)$	\supset	$p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots$ $\dots - f^{(n-1)}(0)$
$(-1)^n t^n f(t)$	\supset	$F^{(n)}(p)$
$\delta(t)$	\supset	1
$\delta^{(n)}(t)$	\supset	p^n
$H(t) = 1_{t>0}$	\supset	$1/p$
t	\supset	$1/p^2$
$t^n/n!$	\supset	$1/p^{n+1}$
e^{-at}	\supset	$1/(p + a)$
$\sin \omega t$	\supset	$\omega/(p^2 + \omega^2)$
$\cos \omega t$	\supset	$p/(p^2 + \omega^2)$
$\sinh at$	\supset	$\frac{a}{p^2 - a^2}$
$\cosh at$	\supset	$\frac{p}{p^2 - a^2}$
$e^{-at} t^n/n!$	\supset	$1/(p + a)^{n+1}$
$e^{-at} \sin \omega t$	\supset	$\frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \cos \omega t$	\supset	$\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}$
$e^{bt} \sinh at$	\supset	$\frac{a}{(p-b)^2 - a^2}$
$e^{bt} \cosh at$	\supset	$\frac{p-b}{(p-b)^2 - a^2}$
$\frac{e^{at} - e^{bt}}{a-b}$	\supset	$\frac{1}{(p-a)(p-b)}$
$\frac{ae^{at} - be^{bt}}{a-b}$	\supset	$\frac{p}{(p-a)(p-b)}$
$[(b-a)t + 1]e^{-at}$	\supset	$\frac{p+b}{(p+a)^2}$
$t \sin \omega t$	\supset	$\frac{2\omega p}{(p^2 + \omega^2)^2}$
$t \cos \omega t$	\supset	$\frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}$
$\frac{\sin(\omega t) - \omega t \cos \omega t}{2\omega^3}$	\supset	$\frac{1}{(p^2 + \omega^2)^2}$

TABLE 12.7 – Tableau de transformée de Fourier.

Domaine du temps continu $t \in \mathbb{R}$	\xrightarrow{TF} $\xleftarrow{TF^{-1}}$	Domaine des fréquences $\nu \in \mathbb{R}$ ($\omega = 2\pi\nu$)
$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu)e^{+j2\pi\nu t}d\nu$	définitions	$F(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j2\pi\nu t}dt$
$f(-t)$		$F(-\nu)$
$f(t/a)$		$ a F(a\nu)$
$f(t) * g(t)$	convolution	$F(\nu).G(\nu)$
$f(t).g(t)$	multiplication	$F(\nu) * G(\nu)$
$f(t - t_0)$	retard	$e^{-j2\pi t_0\nu}F(\nu)$
$e^{j2\pi\nu_0 t}f(t)$	changement de fréquence	$F(\nu - \nu_0)$
$f^{(n)}(t)$	dérivée n-ième	$(j2\pi\nu)^n F(\nu)$
$(-j2\pi t)^n f(t)$		$F^{(n)}(\nu)$
$\overline{f(t)}$	conjugaison	$\overline{F(-\nu)}$
$\delta(t)$	impulsion de Dirac	1
1	constante	$\delta(\nu)$
$\delta(t - t_0)$	Dirac décalé	$e^{-j2\pi t_0\nu}$
$e^{j2\pi\nu_0 t}$		$\delta(\nu - \nu_0)$
$\delta^{(n)}(t)$	Dirac dérivé	$(j2\pi\nu)^n$
$(j2\pi t)^n$		$(-1)^n \delta^{(n)}(\nu)$
$\square_T(t)$	porte	$T \text{sinc}(\pi\nu T)$
$\sin(\pi t)/(\pi t)$	sinus cardinal	$\square_1(\nu)$
$\bigwedge_T(t)$	triangle	$(T/2)\text{sinc}^2(\pi\nu T/2)$
$H(t)$	échelon unité	$\frac{\delta(\nu)}{2} - \frac{j}{2\pi\nu}$
$\text{sign}(t)$	fonction signe	$-\frac{j}{\pi\nu}$
$\cos 2\pi\nu_0 t$	cosinus	$\frac{1}{2}[\delta(\nu + \nu_0) + \delta(\nu - \nu_0)]$
$\sin 2\pi\nu_0 t$	sinus	$\frac{j}{2}[\delta(\nu + \nu_0) - \delta(\nu - \nu_0)]$
$\exp(-\pi t^2)$	gaussienne	$\exp(-\pi\nu^2)$
$e^{-t}H(t)$		$1/(1 + j2\pi\nu)$
$e^{- t }$		$2/(1 + 4\pi^2\nu^2)$
$te^{-\pi t^2}$		$-j\nu e^{-\pi\nu^2}$
$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e)$	peigne, $F_e = \frac{1}{T_e}$	$F_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\nu - nF_e)$
$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n)$	cas où $T_e = 1$	$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\nu - n)$
$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi n t}$	Formule de Poisson	$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\nu - n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi n \nu}$

TABLE 12.8 – Tableau récapitulatif de la transformée en Z.

Domaine du temps échantillonné $t = nT_e \Rightarrow f(t) = f(nT_e) = f(n)$	\xrightarrow{TZ} $\xleftarrow{TZ^{-1}}$	Domaine des fréquences $F(z)$ $z = e^{pT_e} \in \mathbb{C}$
$f(nT_e) = \frac{1}{j2\pi} \oint_{C_0} \frac{F(z)}{z} z^n dz$	\leftrightarrow	$F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(n) z^{-n}$
$f(t - kT_e) = f(n - k)$	\leftrightarrow	$z^{-k} F(z)$
$f(t + kT_e) = f(n + k)$	\leftrightarrow	$z^k F(z) - \sum_{n=0}^{k-1} z^{k-n} f(nT_e)$
$f_1(t) * f_2(t) = \sum_{k=0}^{t/T_e=n} f_1(kT_e) f_2(t - kT_e)$	\leftrightarrow	$F_1(z) \cdot F_2(z)$
$f(0)$	$=$	$\lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$
$f(\infty)$	$=$	$\lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) F(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) F(z)$
$f(t) e^{-at}$	\leftrightarrow	$F(z e^{aT_e})$
$f(t) a^t$	\leftrightarrow	$F(\frac{z}{a^{T_e}})$
$tf(t)$	\leftrightarrow	$-T_e z F'(z)$
$\delta(t)$	\leftrightarrow	1
$\delta(t - kT_e)$	\leftrightarrow	z^{-k}
$H(t)$	\leftrightarrow	$z/(z - 1)$
e^{-at}	\leftrightarrow	$z/(z - e^{-aT_e})$
a^t	\leftrightarrow	$z/(z - a^{T_e})$
t	\leftrightarrow	$T_e z/(z - 1)^2$
t^2	\leftrightarrow	$T_e^2 z(z + 1)/(z - 1)^3$
te^{-at}	\leftrightarrow	$T_e z e^{-aT_e}/(z - e^{-aT_e})^2$
$e^{-at} t^2/2$	\leftrightarrow	$\frac{z T_e^2 e^{-aT_e}}{2(z - e^{-aT_e})^2} + \frac{z T_e^2 e^{-2aT_e}}{(z - e^{-aT_e})^3}$
$\sin \omega t$	\leftrightarrow	$z \sin \omega T_e / (z^2 - 2z \cos \omega T_e + 1)$
$\cos \omega t$	\leftrightarrow	$z(z - \cos \omega T_e) / (z^2 - 2z \cos \omega T_e + 1)$
$e^{-at} \sin \omega t$	\leftrightarrow	$\frac{z e^{-aT_e} \sin \omega T_e}{(z^2 - 2z e^{-aT_e} \cos \omega T_e + e^{-2aT_e})}$
$e^{-at} \cos \omega t$	\leftrightarrow	$\frac{z(z - e^{-aT_e} \cos \omega T_e)}{(z^2 - 2z e^{-aT_e} \cos \omega T_e + e^{-2aT_e})}$
$\sinh \omega t$	\leftrightarrow	$z \sinh \omega T_e / (z^2 - 2z \cosh \omega T_e + 1)$
$\cosh \omega t$	\leftrightarrow	$z(z - \cosh \omega T_e) / (z^2 - 2z \cosh \omega T_e + 1)$

TABLE 12.9 – Tableau synthétique de correspondance.

Transformée / Relations	Directe	Inverse
TF énergie finie $\omega = 2\pi\nu$	$X(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi\nu t} dt$	$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu)e^{+j2\pi\nu t} d\nu$
TFDT échantillonné $t = nT_e$ $F_e = 1/T_e$	$X(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n \exp(-j2\pi\nu nT_e)$	$x_n = \int_{-F_e/2}^{F_e/2} X(\nu) \exp(j2\pi\nu nT_e) d\nu$
TFDT fréq. réduite $u = \frac{\nu}{F_e}$ ($F_e = 1$)	$X(u) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n \exp(-j2\pi nu)$	$x_n = \int_{-1/2}^{1/2} X(u) \exp(j2\pi nu) du$
TFD (FFT) durée tronquée $\nu = \frac{kF_e}{N}$ $T = NT_e$	$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \exp(-j\frac{2\pi nk}{N})$	$x_n = \sum_{k=0}^{N-1} X_k \exp(+j\frac{2\pi nk}{N})$
DSF périodique $\nu_k = \frac{k}{T_0}$ période T_0	$C_k = \frac{1}{T_0} \int_{[T_0]} x(t) \exp\left(-j\frac{2\pi kt}{T_0}\right) dt$	$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k \exp\left(j\frac{2\pi kt}{T_0}\right)$
TL analogique $p = j\omega$; $C = 0$ causal	$X(p) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-pt} dt$	$x(t) = \frac{1}{j2\pi} \int_{C-j\infty}^{C+j\infty} X(p)e^{pt} dp$
TZ numérique $z = e^{pT_e}$ C_0 cercle U $t = nT_e$	$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT_e)z^{-n}$	$x(nT_e) = \frac{1}{j2\pi} \oint_{C_0} z^{n-1} X(z) dz = \sum_i \text{Résidu} [z^{n-1} X(z); z = p_i]$

12.14 Vade-mecum du calcul symbolique

On pose [25] :

$$\boxed{\phi(p) \underset{x_c}{\subset} f(t)}$$

Dérivation et intégration par rapport à t :

$$\frac{df}{dt} \underset{\max(0, x_c)}{\supset} p \phi(p) - f(0^+) \quad ; \quad \int_0^t f(\theta) d\theta \underset{\max(0, x_c)}{\supset} \frac{\phi(p)}{p}$$

Généralisation :

$$f^{(n)}(t) \supset p^n \phi(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{n-1-k} f^{(k)}(0)$$

Dérivation et intégration par rapport à la variable p :

$$\frac{d\phi}{dp} \subset -t f(t) \quad ; \quad \frac{d^n \phi}{dp^n} \subset (-1)^n t^n f(t) \quad ; \quad \int_p^\infty \phi(p) dp \subset \frac{f(t)}{t}$$

Translation de la variable concrète t et symbolique p :

$$e^{\pm pa} \phi(p) \underset{x_c}{\subset} f(t \pm a) \quad ; \quad \phi(p+a) \underset{x_c - Re(a)}{\subset} e^{-at} f(t)$$

Théorème du produit de convolution (produit de Borel) :

$$\text{Soient } \begin{matrix} \phi_1(p) \subset f_1(t) \\ \phi_2(p) \subset f_2(t) \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\phi_1(p) \phi_2(p) \subset f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\theta) f_2(t-\theta) d\theta$$

Théorèmes de la valeur initiale et de la valeur finale :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} p \phi(p) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = f(0) \quad ; \quad \lim_{p \rightarrow 0} p \phi(p) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$$

Changement d'échelle :

Soit $k \in \mathbb{R}^+$

$$k \phi(kp) \underset{\frac{x_c}{k}}{\subset} f\left(\frac{t}{k}\right)$$

Dérivation et intégration par rapport à un paramètre :

$$\phi(p, \alpha) \subset f(t, \alpha) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \phi(p, \alpha) \subset \frac{\partial}{\partial \alpha} f(t, \alpha) \quad ; \quad \int_a^b \phi(p, \alpha) d\alpha \subset \int_a^b f(t, \alpha) d\alpha$$

12.15 Vade-mecum pour la transformée de Fourier

Définition : on note

$$F(\nu) = TF[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i2\pi \nu t} dt$$

Formule d'inversion :

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu) e^{+i2\pi \nu t} d\nu = TF^{-1}[F(\nu)]$$

Transposition :

$$TF[f(-t)] = F(-\nu)$$

Conjugaison :

$$TF[\overline{f(t)}] = \overline{F(-\nu)}$$

Changement d'échelle :

$$\forall a \in \mathbb{R}^* \quad \text{si } F(\nu) = TF[f(t)] \quad \text{alors } TF[f(at)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\nu}{a}\right)$$

Translation de la variable concrète t :

$$TF[f(t - t_0)] = e^{-i2\pi \nu t_0} F(\nu)$$

Règle de modulation :

$$TF[e^{i2\pi \nu_0 t} f(t)] = F(\nu - \nu_0)$$

Dérivation par rapport à t :

$$TF[f^{(n)}(t)] = (i2\pi \nu)^n F(\nu)$$

Dérivation par rapport à ν :

$$F^{(n)}(\nu) = TF[(-i2\pi t)^n f(t)]$$

Convolution :

$$TF[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(\nu) \cdot F_2(\nu)$$

Formule de Parseval-Plancherel :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\nu) \cdot \overline{F_2(\nu)} d\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) \cdot \overline{f_2(t)} dt$$

TF des distributions :

$$TF[\delta(t - a)] = e^{-i2\pi \nu a}$$

Egalité fondamentale : cf. moyen mnémotechnique Fig. 7.1, p. 115.

12.16 Vade-mecum sur la transformée en Z

On pose : $\boxed{z = e^{pT_e}}$

Définition : $\boxed{Z[f(t)] = F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT_e) z^{-n} \quad |z| > e^{\sigma T_e}}$

Transformée en Z des puissances de t :

$$Z[t^k] = -T_e z \frac{d}{dz} Z[t^{k-1}] \quad ; \quad Z[1] = \frac{z}{z-1}, \quad |z| > 1 \quad ; \quad Z[t] = \frac{T_e z}{(z-1)^2}$$

Transformée en Z de $f(t)e^{-at}$:

$$Z[e^{-at} f(t)] = F(e^{aT_e} z) \quad ; \quad Z[e^{-at}] = \frac{z}{z - e^{-aT_e}}$$

Retard temporel : $\boxed{Z[f(t - kT_e)] = z^{-k} Z[f(t)]}$

Avance temporelle :

$$Z[f(t + kT_e)] = z^k \left[F(z) - \sum_{m=0}^{k-1} f(mT_e) z^{-m} \right]$$

Théorème de la valeur initiale : $\boxed{\lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = f(0)}$

Théorème de la valeur finale :

$$f(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) F(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) F(z)$$

Théorème de convolution discrète :

$$\begin{cases} F_1(z) = Z[f_1(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} f_1(nT_e) z^{-n} \\ F_2(z) = Z[f_2(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} f_2(nT_e) z^{-n} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\boxed{F_1(z) \cdot F_2(z) = Z[f_1(t) * f_2(t)] = Z\left[\sum_{n=0}^{t/T_e} f_1(nT_e) f_2(t - nT_e)\right]}$$

Dérivation et intégration par rapport à un paramètre :

$$Z\left[\frac{\partial}{\partial a} f(nT_e, a)\right] = \frac{\partial}{\partial a} F(z, a) \quad ; \quad Z\left[\int_{a_0}^{a_1} f(nT_e, a) da\right] = \int_{a_0}^{a_1} F(z, a) da$$

Théorème de Parseval : $\sum_{n=0}^{\infty} [f(nT_e)]^2 = \frac{1}{2i\pi} \oint_{C_0} z^{-1} F(z) F(z^{-1}) dz$

Formule d'inversion :

$$f(nT_e) = \frac{1}{j2\pi} \oint_{C_0} z^{n-1} F(z) dz = \sum_i \text{Résidu} [z^{n-1} F(z); z = p_i]$$

Chapitre 13

Exercices

Préambule

Ce chapitre contient une centaine d'exercices dont les corrigés numérotés sont fournis au chapitre 15. Certains exercices sont à dessein redondants, ou reformulés de manière différente, et les corrigés sont à dessein parfois succincts, parfois exhaustifs, offrant ainsi une variante dans la difficulté, et permettant un entraînement répété et approfondi.

13.1 Trigonométrie

1. Résoudre : $\cos 2x - \cos 4x = \sin x$.

N.B. : on pourra utiliser la formule trigonométrique de : $\cos a - \cos b$.

2. En appliquant la formule de Moivre, exprimer $\cos 4\theta$ en fonction de $\cos \theta$.

3. Montrer que :

$$\cos(4 \arctan x) = \frac{1 - 6x^2 + x^4}{(1 + x^2)^2}$$

N.B. : On pourra poser $\theta = \arctan x$, et utiliser le résultat du 2).

13.2 Nombre complexe

1. Soit le nombre complexe :

$$Z = \frac{ix}{1 + ix}$$

où x est un réel positif.

Exprimer le module et l'argument de Z , ainsi que ses parties réelle $\Re(z)$ et imaginaire $\Im(z)$.

A.N. : Calculer module et argument de Z pour $x = 1$.

2. Soit la fonction complexe :

$$Z(x) = A + iBx + \frac{1}{iCx}$$

où A, B, C sont des constantes positives et x une variable réelle positive.

Exprimer le module de $Z(x)$.

Rechercher son extremum en fonction de x : pour cela, déterminer la valeur de la variable x_0 qui annule la dérivée $\frac{dZ}{dx} = 0$. S'agit-il d'un minimum ou d'un maximum ?

3. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que le rapport complexe :

$$\frac{1+z}{1-z}$$

est imaginaire pur si et seulement si le module de z est égal à 1.

13.3 Dérivation

1. Calculer la dérivée de : $f(x) = (x^2 + 1)\sqrt{x^3 - 1}$

2. Idem pour :

$$g(x) = \frac{(x-1)^3}{x^{1/2}}$$

3. Calculer la dérivée de :

$$f(x) = \frac{1}{3} \tan^3 x - \tan x + x$$

4. Idem pour :

$$g(x) = \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x$$

5. Montrer par récurrence que la dérivée n -ième de

$$f(x) = e^{x \cos \alpha} \cos(x \sin \alpha)$$

(où α est une constante réelle) vaut :

$$f^{(n)}(x) = e^{x \cos \alpha} \cos(x \sin \alpha + n\alpha)$$

6. Etablir par récurrence la dérivée n -ième de : $f(x) = \ln(1+x)$

7. Etablir par récurrence la dérivée n -ième de :

$$g(x) = \frac{1}{x}$$

13.4 Intégration trigonométrique

1. Soit la fonction périodique de période T :

$$f(t) = A \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right).$$

Calculer l'intégrale :

$$I = \frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt$$

2. Calculer, par changement de variable, la primitive :

$$F(x) = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$$

3. Idem pour :

$$\int \frac{\cos^2 \frac{x}{2}}{x + \sin x} dx$$

4. Calculer, par intégration par parties :

$$\int x \sin x dx$$

5. Calculer par changement de variable évident :

$$I_4 = \int \cot x dx$$

6. Calculer par intégration par parties :

$$I_{10} = \int x \tan^2 x dx$$

13.5 Equation différentielle

- Résoudre : $y'' + 3y' + 2y = 5x + 1$
où $y = y(x)$ est une fonction de la variable réelle x .
- On considère la relation :

$$x^2 y'' - \frac{1}{2} x y' - y = 0$$

où y est une fonction de la variable x , et y' et y'' sont ses dérivées première et seconde.

Trouver toutes les fonctions de la forme $y = x^\alpha$, vérifiant cette relation pour $x > 0$.

Idem pour la relation : $x^2 y'' - x y' + y = x^2$

- Résoudre : $y' + 2y = 5 \sin(3x)$, avec la condition initiale $y(0) = 1$.

13.6 Décomposition de fraction rationnelle

$$\begin{aligned}
 F_1(x) &= \frac{5x^2 - 14x + 3}{(x^2 - 3x + 2)^2(x - 3)} \\
 F_2(x) &= \frac{1}{4x^2 + 4x + 5} \\
 F_3(x) &= \frac{5x^2 - 14x + 3}{(x^2 - 3x + 3)^2(x - 3)} \\
 F_4(x) &= \frac{x^3 - 1}{x^2 - 4x + 4} \\
 F_5(x) &= \frac{6x^2 - x + 1}{x(x^2 - 1)} \\
 F_6(x) &= \frac{2x^2 + 13}{(x - 2)^2(x + 5)} \\
 F_7(x) &= \frac{x}{x^3 + x^2 + x + 1}
 \end{aligned}$$

13.7 Intégration

1. Calculer en décomposant la fraction :

$$I_1 = \int \frac{x}{x^3 + x^2 + x + 1} dx$$

2. Montrer par le calcul que ces 2 intégrales impropres valent $\frac{\pi}{2}$:

$$I_2 = \int_0^{\infty} \frac{dx}{1 + x^2} \quad \text{et :} \quad I_3 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

3. Calculer par intégration par parties et récurrence :

$$I_n = \int x^n \cdot e^x \cdot dx$$

4. Calculer, en développant les intégrandes, les primitives de :

$$I_5 = \int \frac{x^{\frac{2}{3}} + 1}{x^{1/3}} dx \quad \text{et :} \quad I_6 = \int \left(1 - \frac{1}{3\sqrt{x}}\right)^2 dx$$

5. Calculer par changement de variable évident :

$$I_7 = \int \frac{dx}{x\sqrt{1 - \log^2 x}}$$

6. Calculer par intégration par parties répétée :

$$I_8 = \int x^2 e^{2x} dx$$

7. Calculer par changement de variable $x = a \sin^2 t$ (à justifier) :

$$I_9 = \int \frac{\sqrt{a-x}}{\sqrt{x}} dx$$

8. Etablir une formule de récurrence pour : $I_n = \int (\log x)^n dx$
En déduire la valeur de I_n pour $n \in \mathbb{N}^+$.

13.8 Somme de Riemann

Soit le terme général : $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$, où $\alpha > 0$. Ce terme représente une somme partielle de série de Riemann. Montrer que :

- la suite (u_n) converge si : $\alpha > 1$,
- la suite (u_n) diverge si : $0 < \alpha \leq 1$.

13.9 Nature des suites par comparaison

Etudier la nature des suites, et celle de leurs sommes partielles :

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{1}{\sqrt{n}}; \text{ b) } \frac{1}{3+n^2}; \text{ c) } \frac{1}{(\log n)^p}; \text{ d) } \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}; \text{ e) } \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}} \\ \text{f) } \log n \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \log\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

13.10 Suite associée

Soit une suite S_n définie par :

$$S_1 = a; S_2 = b; S_3 = \frac{S_1 + S_2}{2}; \dots; S_n = \frac{S_{n-1} + S_{n-2}}{2}$$

où a et b désignent deux nombres réels quelconques. On lui associe la suite $u_n = S_n - S_{n-1}$ (et $u_1 = S_1$).

1. Montrer que u_n est le terme général d'une progression géométrique convergente.
2. En déduire la valeur de S_n et sa limite quand $n \rightarrow \infty$.

13.11 Somme de cosinus et sinus d'arcs en progression arithmétique

Cet exercice trouve application en électrotechnique pour l'étude du courant triphasé.

$$\begin{aligned} u &= \cos a + \cos(a+b) + \cos(a+2b) + \cdots \cos(a+kb) \cdots + \cos[a+(n-1)b] \\ v &= \sin a + \sin(a+b) + \sin(a+2b) + \cdots \sin(a+kb) \cdots + \sin[a+(n-1)b] \end{aligned}$$

On forme $u + iv$ en posant : $\alpha = \cos a + i \sin a = e^{ia}$; $z = \cos b + i \sin b = e^{ib}$.

1. Exprimer z^k puis αz^k .
2. Montrer que $u + iv$ est la somme partielle d'une suite géométrique.
3. Calculer u et v .
4. Application 1 : montrer que

$$S = \sin 1^\circ + \sin 3^\circ + \dots + \sin 99^\circ = \frac{\sin^2 50^\circ}{\sin 1^\circ}$$

5. Application 2 : montrer que

$$\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}$$

13.12 Paradoxes grecs

Paradoxe de Zénon d'Elée (dit paradoxe de la flèche qui n'atteint jamais la cible) [30] :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$$

Paradoxe de l'obélisque (dont la hauteur infinie touche aux cieux) :

$$H = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots \quad (13.1)$$

$$S = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots \quad (13.2)$$

$$V = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \cdots + \frac{1}{n^3} + \cdots \quad (13.3)$$

13.13 Suite définie implicitement

Soit f la fonction de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par [12] :

$$f(t) = \frac{3t-1}{t+1}.$$

On note $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite numérique initialisée à $u_0 = 4$ et définie par le formule de récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Représenter la fonction $y = f(t)$ et y superposer le diagramme itératif de u .
2. Calculer les vingt premiers termes de la suite.
3. Que peut-on conjecturer quant au comportement de cette suite ?
4. Démontrer que cette suite est bornée et étudier sa monotonie.
5. Justifier sa convergence.
6. Préciser sa limite.
7. Démontrer par récurrence que : $u_n = \frac{8+3n}{2+3n}$.

13.14 Suite de Fibonacci

Soit la suite définie par : $a_0 = 0$; $a_1 = 1$; $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$

Cette suite modélise la croissance d'une population de lapins.

Etudier son comportement en fonction de n et en faire une représentation graphique.

13.15 Convergence de suites

1. Etudier la convergence de la suite numérique de terme général :

$$u_n = \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n, \text{ avec : } a \in \mathbb{R}$$

2. Etudier la suite u négative pour $n \geq 4$ définie par : $u_n = \frac{3-n}{n^2}$
3. Etudier de même la suite v positive pour $n \geq 4$: $v_n = \frac{n+3 \times (-1)^n}{n^2}$
4. Etudier enfin la suite alternée w pour $n \geq 4$: $w_n = \frac{3-(-1)^{n \times n}}{n^2}$

13.16 Suite récurrente

On considère la suite (u_n) définie par la récurrence $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$ [5].

1. On prend $u_0 = 2$. Calculer u_1 . Montrer que la suite est décroissante et qu'elle est minorée.
2. On prend maintenant $u_0 = 0$. Montrer que la suite est alors croissante et majorée par 2.

3. Calculez u_n à partir de $u_0 = 2$, puis à partir de $u_0 = 0$ en arrêtant les calculs lorsque $|u_{n+1} - u_n| < 10^{-8}$. Conjecturer la valeur de la limite de la suite.
4. Confirmer par le calcul la valeur théorique de la limite de la suite récurrente (u_n) .

13.17 Raisonnement assassin par récurrence

On dira l'histoire cruelle, mais pas inutilement, parce qu'elle illustre à merveille le raisonnement par récurrence (exercice extrait de [24]).

A Bagdad, un sultan ayant découvert la félonie de l'une de ses maîtresses décide d'éliminer de sa ville toutes les femmes infidèles. Ordre est donc donné aux maris trompés de tuer leurs épouses en cas de culpabilité.

Chaque homme connaît la fidélité ou l'infidélité de toutes les femmes de Bagdad, excepté la situation de sa propre épouse (on suppose, pour la beauté du raisonnement, que tous les hommes de Bagdad sont monogames), lui seul a pourtant le droit de tuer son épouse en cas d'infidélité.

Par ailleurs, un héraut annonce chaque soir s'il y a encore, ou non, des femmes infidèles à Bagdad. Ce héraut est, de tous les hommes de la ville, le seul à connaître la fidélité ou l'infidélité de toutes les femmes et l'on suppose qu'il n'est pas marié.

Le héraut annonce 82 soirs de suite : "Il y a encore des femmes infidèles à Bagdad !" Mais le 83ème soir, il peut proclamer : "Il n'y a plus de femme infidèle à Bagdad !"

Question : Combien y avait-il de femmes infidèles à Bagdad et que s'est-il passé ?

13.18 Nature des séries

Préciser la nature des séries de terme général :

1. $\left(\frac{n^2-5n+1}{n^2-4n+2}\right)^{n^2}$
2. $\frac{1+n^2}{n!}$
3. $\frac{n!}{a^n}$ (avec $a > 0$)
4. $\frac{n!}{n^n}$
5. $\frac{2n}{n+2^n}$
6. $\frac{\sqrt{n(n-1)}}{n^3+2\sqrt{n}-3\log n}$
7. $\frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}$

8. $\left(n \sin \frac{1}{n}\right)^{n^2}$
9. $\log \frac{1}{\sqrt{n}} - \log \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$
10. $\frac{1}{\sqrt[n]{n \times n}}$
11. $\arcsin \frac{2n}{4n^2+1}$

13.19 Séries alternées

Préciser le caractère de convergence des séries suivantes :

$$(-1)^n \tan \frac{1}{n} \qquad (-1)^n {}^n\sqrt{n} \sin \frac{1}{n}$$

13.20 Comparaison avec une intégrale

Etudier la convergence de $u_n = \frac{\log n}{n^2}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ en comparant à l'intégrale de la fonction $f(x) = \frac{\log x}{x^2}$.

13.21 Calcul de somme de série

Calculer la somme $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N u_n$ de la série de terme général $u_n = \log \cos \frac{x}{2^n}$. On transformera à l'aide de la formule : $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$.

13.22 Calcul de sommes de séries numériques

1. On considère la série de terme général $u_k = \frac{1}{k(k+1)}$. Montrer que cette série converge. Décomposer u_k en une somme de deux termes. En déduire la somme de cette série.
2. On considère la série $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} \rightarrow S$ quand $n \rightarrow \infty$. Montrer que cette série converge. Donner l'encadrement du reste de cette série. Calculer la valeur de S avec une précision de 10^{-2} .

13.23 Rayon de convergence de série entière

On s'intéresse aux rayons de convergence des 5 séries entières suivantes :

1. $u_n(x) = \frac{x^n}{n!}$
2. $u_n(x) = \frac{x^n}{n^\alpha}$ avec $\alpha > 0$

3. $u_n(x) = n^{\log n} x^n$
4. $\frac{1}{1+x} = \sum_0^\infty (-1)^n x^n$
5. $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$

Montrer que $R = +\infty$ pour le cas 1, et que $R = 1$ pour les 4 autres cas.

13.24 Convergence de séries à termes positifs

Donner les valeurs de x pour lesquelles les séries suivantes convergent :

$$S_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \left(x^k + \frac{1}{2^k x^k} \right) \quad (13.4)$$

$$S_2 = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k 3^k \log(k)} \quad (13.5)$$

$$S_3 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2k-1}}{2k 4^k} \quad (13.6)$$

$$S_4 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+1} \left(\frac{x}{2} \right)^k \quad (13.7)$$

13.25 Séries à termes positifs et négatifs

Discuter suivant les valeurs de x la convergence des séries :

$$S_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n+2}}{n+1} (2-x)^n \quad (13.8)$$

$$S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x)^n (2n-1)^{2n}}{(3n-2)^{2n}} \quad (13.9)$$

$$S_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(x-2)^n} \quad (13.10)$$

13.26 Développement d'un signal carré

Soit un signal carré pair $s(t)$ de période T , d'amplitude E , et valant $+E$ en $t = 0$. Calculer son DSF.

Illustration du résultat : utiliser le programme Matlab du paragraphe 16.4.1.

13.27 Signal rectangulaire

On s'intéresse au DSF du signal rectangulaire représenté sur la Fig. 13.1.

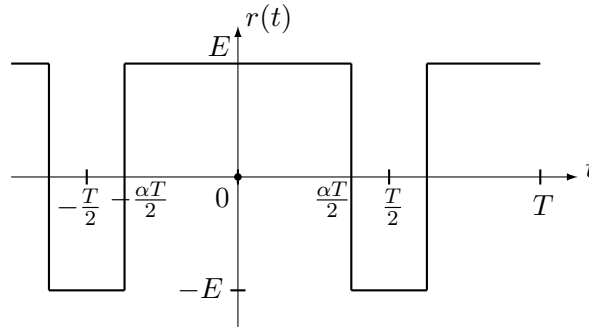


FIGURE 13.1 – Signal rectangulaire.

1. Traiter d'abord le cas général du signal rectangulaire de rapport cyclique α .
2. En déduire le cas particulier du signal carré pour $\alpha = 0.5$.
3. **Exercice complémentaire :** Reprendre ces calculs dans le cas particulier où $\alpha = 0.5 + \varepsilon$ avec $\varepsilon \ll 0.5$; que constate-t-on pour les harmoniques pairs ?

13.28 Signal triangulaire pair

Soit le signal $s(t)$ triangulaire, pair, de période T et d'amplitude E (Fig. 13.2).

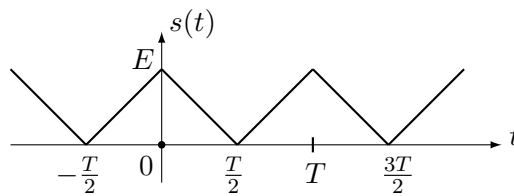


FIGURE 13.2 – Signal triangulaire.

Calculer son développement en série de Fourier.

On notera pour simplifier l'écriture : $\omega = 2\pi/T$.

13.29 Redressement double alternance

Donner la décomposition en série de Fourier de la fonction suivante :

$$x(t) = A|\sin(\omega t)|$$

qui correspond au signal électrique du redressement double alternance.

13.30 Signal en dents de scie

Calculer le DSF d'un signal périodique en dents de scie de période T et d'amplitude A défini par l'équation :

$$s(t) = \frac{A}{T}t \quad \text{pour } [0, T]$$

On pourra poser : $\omega = 2\pi/T$.

13.31 Développement d'un signal triangulaire

1. Donner la décomposition en série de Fourier de la fonction triangulaire périodique définie par la courbe de la Fig. 13.3 (après avoir choisi l'origine des temps et des ordonnées à votre convenance).

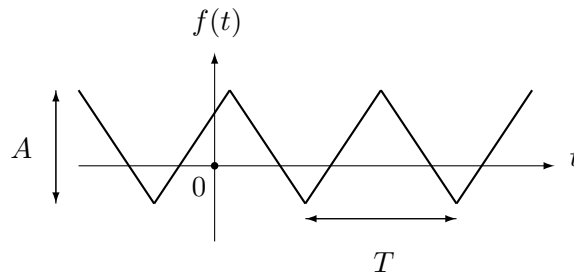


FIGURE 13.3 – Signal triangulaire.

2. Représenter graphiquement l'allure du spectre correspondant (module des coefficients de Fourier).
3. Interpréter.

13.32 Signal d'un onduleur

Un onduleur à commande décalée est un montage qui permet, à l'aide d'un générateur de tension continue et de quatre interrupteurs électroniques bidirectionnels tantôt ouverts, tantôt fermés, d'obtenir une tension alternative u aux bornes d'un récepteur, périodique de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$, de la forme indiquée Fig. 13.4 [12].

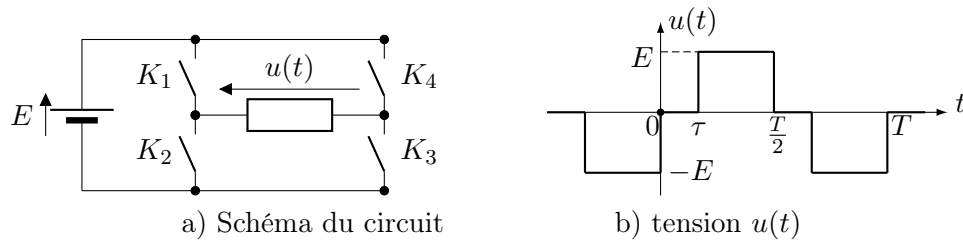


FIGURE 13.4 – Tension fournie par un onduleur.

1. Montrer que le D.S.F. du signal u peut s'écrire :

$$u(t) = \frac{4E}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2k+1} \cos \left[(2k+1)\omega \frac{\tau}{2} \right] \sin \left[(2k+1)\omega \left(t - \frac{\tau}{2} \right) \right]$$

Pour faciliter le calcul, on s'intéressera d'abord au signal v décalé dans le temps : $v(t) = u(t + \tau/2)$ dont on donnera le DSF. On en déduira ensuite le DSF de $u(t) = v(t - \tau/2)$.

2. Tracer l'allure du spectre d'amplitude correspondant à u . Interpréter.
3. Déterminer les décalages horaires τ qui permettent l'élimination de l'harmonique de rang 3, puis celui de rang 5.

13.33 Décomposition en série de Fourier et calcul de série

On considère la fonction $f(x)$ de période 2π définie dans l'intervalle $[-\pi, +\pi]$ par la représentation de la Fig. 13.5.

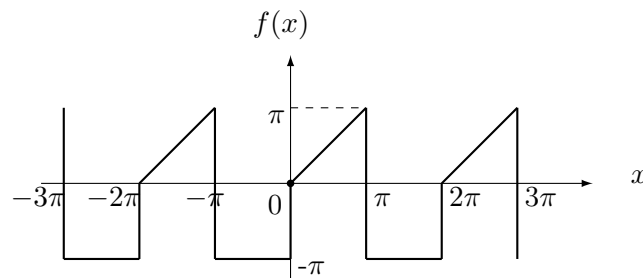


FIGURE 13.5 – Fonction périodique.

1. Montrer que $f(x)$ vérifie les conditions de Dirichlet.

2. Calculer les coefficients du développement de $f(x)$.
3. Poser $x = 0$ et en déduire la somme $S_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$. Vérifier ce résultat en posant $x = \pi$.
4. Poser $x = \pi/2$ et en déduire la somme $S_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.
5. Par application de la formule de Bessel-Parseval, sachant que $S_3 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et compte tenu de la valeur de S_1 , donner la valeur de la somme

$$S_4 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}$$

6. On considère maintenant la fonction $g(x) = \frac{df}{dx}$. Représenter $g(x)$ dans l'intervalle $[-\pi, +\pi]$. Calculer les coefficients du développement en série de Fourier de $g(x)$ à partir de l'expression analytique de $g(x)$.
7. Retrouver les résultats de la question 6 à partir des coefficients calculés en 2 et des discontinuités de $f(x)$.
8. A partir de la valeur de $g(x)$ obtenue pour $x = \pi/2$, retrouver la valeur de la somme S_2 .

13.34 Démonstration de la formule de Wallis

Cette formule permet le calcul du nombre π . La démonstration se fait en trois étapes :

1. Développer en série de Fourier la fonction : $f(x) = \cos(\alpha x)$.
2. Calculer : $\frac{\sin \pi x}{\pi x}$.
3. Exprimer finalement la formule de Wallis :

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{4n} (n!)^4}{(2n+1) [(2n)!]^2}$$

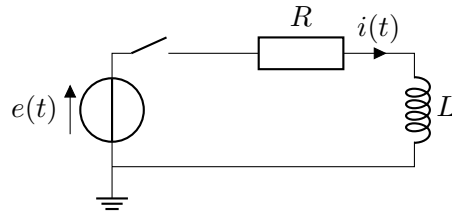
13.35 EDL du 1^{er} ordre : circuit RL série

Le circuit de la Fig. 13.6 est régi par l'équation :

$$e(t) = Ri(t) + L \frac{di}{dt} \quad (13.11)$$

où $e(t)$ est la tension d'excitation du circuit et $i(t)$ le courant. On suppose la condition initiale nulle : $i(0) = 0$.

Calculer et tracer $i(t)$ (pour $t > 0$) quand :

FIGURE 13.6 – Circuit RL série

1. $e(t) = E\mathcal{U}(t)$ est un échelon d'amplitude E
2. $e(t) = \alpha t\mathcal{U}(t)$ est une rampe de pente α
3. A.N. : $R = 2k\Omega$, $L = 100\mu H$

13.36 EDL du second ordre

Résoudre l'équation différentielle :

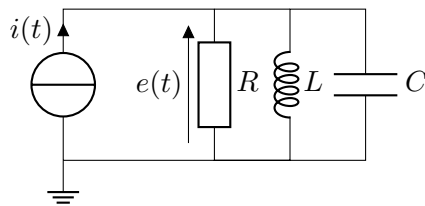
$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2\frac{du}{dt} + 2u(t) = \sin(\omega_0 t) \quad (13.12)$$

avec pour conditions initiales : $u(0) = 0$ et $\frac{du}{dt}(0) = 0$.

A.N. : 1) $\omega_0 = 1$; 2) $\omega_0 = 3$.

13.37 Circuit RLC parallèle

Soit le circuit de la Fig. 13.7, où $R = 12k\Omega$; $L = 10mH$ et $C = 10nF$.

FIGURE 13.7 – Circuit RLC parallèle

Les lois de l'électronique définissent $e(t)$ par :

$$\frac{d^2e(t)}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{de(t)}{dt} + \frac{1}{LC}e(t) = \frac{1}{C}\frac{di(t)}{dt}$$

On donne les conditions initiales : $e(0) = 0$ et $\frac{de}{dt}(0) = \frac{I_0}{C}$ avec $I_0 = 3mA$.

Trouver $e(t)$ pour :

1. $i(t) = I_0 \mathcal{M}(t)$
2. $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$.

13.38 Régime apériodique

Résoudre l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 u(t)}{dt^2} + 2 \frac{du(t)}{dt} + u(t) = \sin(2t)$$

avec les conditions initiales : $u(0) = E$ et $\frac{du}{dt}(0) = 0$.

13.39 Propagation d'un virus

Un virus se propage dans la population d'une île. Une étude démographique a montré que l'effectif de sa population reste constant. A l'instant initial $t_0 = 0$, le virus touche 0.1% de la population. Cinq jours plus tard à $t_1 = 5$, la contamination concerne 0.5 % de la population.

Des chercheurs ont modélisé la diffusion du virus. Si $p(t)$ désigne le pourcentage d'iliens atteints du virus à l'instant t , ils font l'hypothèse que la vitesse de propagation du virus, $p'(t)$, est proportionnelle :

- à $p(t)$: car le risque de contamination augmente avec le nombre de personnes déjà contaminées ;
- à $100 - p(t)$: car le nombre de nouveaux cas de contamination est plus élevé si la population saine susceptible d'être atteinte est très nombreuse.

Le modèle proposé s'exprime donc par une EDL du premier ordre :

$$p'(t) = ap(t)(100 - p(t))$$

où a désigne une constante réelle non nulle liée à la population.

Résolution par changement de fonction

Résoudre en posant :

$$y = \frac{1}{p}$$

1. Exprimer l'EDL qui régit y .
2. Déterminer l'unique solution f de l'équation satisfaisant les conditions initiales à t_0 et à t_5 .
3. Représentation graphique de f pour $t \in [0; T]$ où $T = 40$
4. Déterminer à quel instant 95% de la population sera atteinte par le virus.

13.40 Calcul de transformées

1. Calculer les transformées de Laplace des signaux de la Fig. 13.8 :

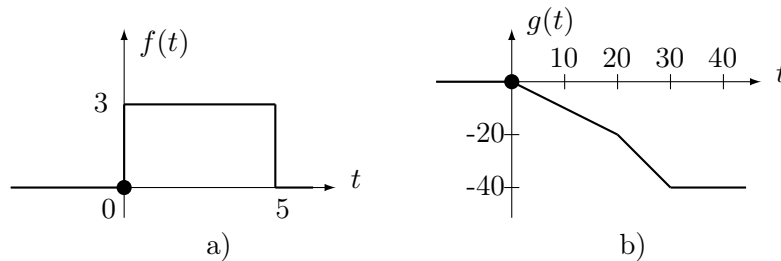


FIGURE 13.8 – a) Impulsion rectangulaire ; b) Fonction linéaire par morceaux.

2. Donner les transformées de Laplace des fonctions suivantes en justifiant les réponses :
- $f(t) = -2 \cos(t) + 3 \sin(t)$
 - $g(t) = e^{5t} \sin(t)$
 - $h(t) = -2 \cos(5t) + 3 \sin(5t)$
 - $k(t) = e^{5t} \sin(2t)$

13.41 Résolution d'une équation différentielle

A l'aide de la transformée de Laplace, résoudre l'équation différentielle linéaire du 2nd ordre à coefficients constants :

$$\frac{d^2 u(t)}{dt^2} + 2 \frac{du(t)}{dt} + 2u(t) = \sin(\omega_0 t).$$

avec pour conditions initiales : $u(0) = a$ et $\frac{du}{dt}(0) = 0$.

- A.N. : 1) Application au cas simple : $a = 0$, $\omega_0 = 1$;
- A.N. : 2) Application au cas : $a = 0$, $\omega_0 = 3$;
- A.N. : 3) Application au cas : $a = 1$, $\omega_0 = 1$.

13.42 Calcul d'un original

Déterminer la réponse impulsionnelle $h(t)$ du circuit ayant la fonction de transfert suivante :

$$H(p) = \frac{p+1}{(p+2)(p^2+2p+2)} \quad \subset \quad h(t)$$

Pour cela :

- Décomposer d'abord la fraction en éléments simples,
- Puis identifier avec les transformées usuelles dans les tables.

13.43 Application électrique : circuit RC

Déterminer la réponse indicielle (*i.e.* à un échelon-unité) d'un circuit RC, puis sa réponse à une sinusoïde.

Rappel sur les impédances complexes : Pour les 3 composants de base de l'électricité (résistance R , inductance L , condensateur C), on sait que les impédances valent respectivement : R , $jL\omega$ et $\frac{1}{jC\omega}$ (où ω est la pulsation). Avec la transformée de Laplace appliquée à la physique (où $p = j\omega$), les impédances s'expriment donc respectivement : R , Lp et $\frac{1}{Cp}$.

13.44 Circuit RLC série

Déterminer la réponse à une sinusoïde d'un circuit RLC série.

A.N. : $R = 12k\Omega$, $L = 10mH$, $C = 10nF$.

13.45 Généralisation de la notion d'impédance

Soit le circuit de la Fig. 13.9. Les condensateurs ont, à leurs bornes, des tensions E_1 et E_2 . A $t = 0$, on ferme l'interrupteur.

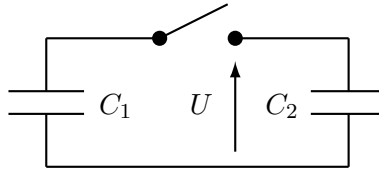
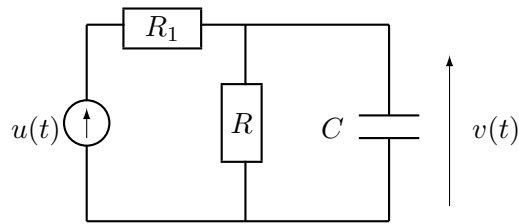


FIGURE 13.9 – Commutation de capacités.

Déterminer $u(t)$ en utilisant la transformée de Laplace.

13.46 Etude de circuit

Soit le circuit de la Fig. 13.10 où l'entrée $u(t)$ est un échelon de Heaviside d'amplitude E , et où la sortie vaut initialement $v(0^-) = 0$.

FIGURE 13.10 – Filtre de courant $R//C$.

Déterminer $v(t)$ en utilisant la méthode mathématique traditionnelle, puis la transformée de Laplace.

13.47 Peigne de Dirac, convolution et échantillonnage

Soit un signal $s(t)$ nul en dehors d'un intervalle de temps borné.

Soient les signaux suivants (où $\Pi(t)$ est le peigne de Dirac) :

$$s_p(t) = s(t) * \Pi(t) \text{ et } s_e(t) = s(t) \cdot \Pi(t)$$

1. Exprimer $s_p(t)$ et $s_e(t)$, puis représenter $s(t)$, $s_p(t)$ et $s_e(t)$.
2. Calculer les transformées de Laplace de $s_p(t)$ et $s_e(t)$.

13.48 Résolution d'équation différentielle

Déterminer à l'aide du calcul symbolique la solution de Heaviside de l'équation différentielle :

$$y^{(2)}(t) + 6y'(t) + 9y(t) = t^2 \exp(-3t)$$

13.49 Bode Nyquist du premier ordre

13.49.1 Fonctions élémentaires

— Tracer les diagrammes de Bode des fonctions suivantes :

1. $T(j\omega) = -5$
2. $T(j\omega) = -0.5$
3. $T(j\omega) = 0.5$
4. $T(j\omega) = 10$

5. $T(j\omega) = 2j\omega$
6. $T(j\omega) = -3j\omega$
7. $T(j\omega) = \frac{4}{j\omega}$
8. $T(j\omega) = \frac{-3}{j\omega}$
9. $T(j\omega) = 2 + 3j\omega$
10. $T(j\omega) = 2 - 3j\omega$
11. $T(j\omega) = -2 - 3j\omega$
12. $T(j\omega) = -2 + 3j\omega$
13. $T(j\omega) = \frac{5}{1+j\omega}$
14. $T(j\omega) = \frac{2}{1-3j\omega}$

N.B. : On commencera par les questions numérotées en gras.

— Tracer les diagrammes de Nyquist des fonctions n° 1 à 12.

13.49.2 Fonctions de transfert composées

Tracer les diagrammes de Bode asymptotiques des fonctions suivantes :

$$T(j\omega) = \frac{10j\omega(2-3j\omega)}{1+j\omega}$$

$$T(j\omega) = -5 \frac{2}{1-3j\omega} \frac{4}{j\omega} (2-3j\omega)$$

13.50 Amplificateur à résistance compensée

Tracer les diagrammes de Bode asymptotiques des fonctions suivantes :

$$H_1(p) = \frac{R}{RCp+1}$$

$$H_2(p) = \frac{Lp+R}{LCp^2+RCp+1}$$

On pourra poser :

$$\omega_c = \frac{1}{RC} ; \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} ; k = \frac{\omega_0}{\omega_c}$$

A.N. : On donne :

$$R = 1k\Omega ; C = 1\mu F ; k = 1.51$$

13.51 Filtre correcteur à avance de phase

Le circuit électrique de la Fig. 13.11 est régi par l'équation différentielle :

$$\frac{dv_s(t)}{dt} + \frac{1}{R_1 C} v_s(t) = \frac{dv_e(t)}{dt} + \frac{1}{R_0 C} v_e(t) \quad \text{où :} \quad \frac{1}{R_1} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_0}$$

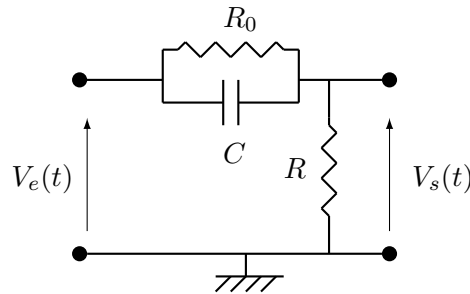


FIGURE 13.11 – Réseau à avance de phase.

1. On suppose le circuit relaxé (conditions initiales nulles).
Exprimer sa fonction de transfert $T(p) = V_s(p)/V_e(p)$.
On posera : $\tau_0 = R_0 C = 1/\omega_0$ et $\tau_1 = R_1 C = 1/\omega_1$.
2. Tracer les courbes asymptotiques de Bode (gain et phase pour $p = j\omega$).
A.N. : $R = 1k\Omega$; $R_0 = 9k\Omega$; $C = 1\mu F$
3. Que vaut le gain statique (quand $\omega \rightarrow 0$) et le gain en HF (quand $\omega \rightarrow \infty$) ?
4. Pourquoi appelle-t-on ce circuit un réseau à avance de phase ?

13.52 Correcteur mécanique à avance de phase

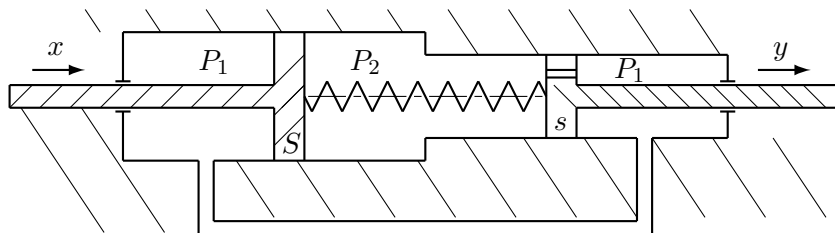


FIGURE 13.12 – Correcteur mécanique à avance de phase.

Le cylindre représenté Fig. 13.12, rempli de fluide qu'on suppose incompressible (huile), comporte deux parties de sections différentes S et s , de rapport $S/s = a$. Les extrémités des cylindres sont reliées par une canalisation sans perte de charge, de sorte que la même pression P_1 règne à chaque instant dans ces extrémités.

Les 2 pistons, de sections respectives S et s sont reliés entre eux par un ressort de raideur r . Les translations des pistons sont respectivement x et y . Le volume V de fluide compris entre les 2 pistons est à la pression P_2 . Entre les domaines P_2 et P_1 existe une fuite qu'on peut schématiser par un trou dans le piston s . On admettra que le débit de fluide à travers ce trou est régi par la loi de Poiseuille :

$$\text{débit volumétrique} = \frac{1}{B}(P_2 - P_1)$$

Au niveau du piston de plus faible section, l'équation qui traduit l'équilibre des forces de pression ($\sum F_{ext} = 0$) est donnée par :

$$-r(y - x) + (P_2 - P_1)s = 0;$$

et celle du débit volumétrique à travers l'orifice est donnée par :

$$Q_v = \frac{1}{B}(P_2 - P_1) = -\frac{dV_2}{dt} = -\frac{d}{dt}(sy - Sx).$$

1. Donner la relation entre l'entrée x et la sortie y .
N.B. : on pourra poser : $a = S/s$ et $\tau = s^2 B/r$.
2. En déduire la fonction de transfert $H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}$ en supposant les C.I. nulles.
3. A.N. : $a = 7$
Ecrire la fonction de transfert sous la forme : $H(\omega) = Re(\omega) + jIm(\omega)$.
4. Quelles sont les valeurs des termes réels et imaginaires pour $\omega \rightarrow 0$ et $\omega \rightarrow \infty$?
5. Que peut-on dire de la phase $\varphi(\omega)$ d'un tel système ?
6. Diagrammes de Bode (échelles semi-logarithmiques) :
Tracer la variation de gain : $G_{dB} = 20 \log_{10} |H| = f(\omega)$
7. Tracer la variation de la phase : $\varphi(\omega) = g(\omega)$
8. Supposant une perturbation en échelon : $x(t) = x_0 u(t)$ (où $u(t)$ dénote l'échelon unité et x_0 son amplitude), quelle est l'allure de $y(t)$? On pourra s'aider du calcul, mais on tâchera aussi de raisonner physiquement.
9. Comparer $H(p)$ avec la fonction de transfert

$$T(p) = \frac{V_s(p)}{V_e(p)}$$

du système électrique de la Fig. 13.11.

13.53 Calculs de transformée de Fourier

1. Calculer la transformée de Fourier d'une porte centrée de largeur T et d'amplitude A .
2. Interprétation sur l'effet spectral de la troncature temporelle d'un signal.

13.54 Modulation d'amplitude et analyse spectrale

Un signal modulé en amplitude s'exprime par :

$$s(t) = [1 + Km(t)]p(t)$$

où :

- K est le taux de modulation (variable de 0 à 1). On prend ici : $K = 50\%$
 - $m(t)$ est le signal modulant. On prendra ici : $m(t) = \sin 2\pi f_m t$
 - $p(t)$ est la porteuse HF : $p(t) = A_p \sin 2\pi f_p t$ où $f_p \gg f_m$
1. Développer $s(t)$ en une somme de fonctions sinusoïdales élémentaires.
 2. En déduire les trois fréquences présentes dans le signal.
 3. A la réception, on observe ce signal sur une durée T , c'est-à-dire qu'on ne voit au récepteur qu'une portion du signal émis : $r(t) = s(t) \cdot \Pi_T(t)$, où $\Pi_T(t)$ est la porte centrée de largeur T .
Rappeler ce que vaut la TF de la fonction porte (et dessiner sommairement son allure en précisant les abscisses des passages par zéro).
 4. En déduire $R(\nu)$, la TF de $r(t)$.
 5. Représenter sommairement l'allure du spectre correspondant (module de la TF : $|R(\nu)|$), dans le cas où T est très grand.
 6. Si l'on considère comme négligeables les lobes secondaires d'un sinus cardinal, quelle est la durée d'observation minimale T_{min} nécessaire pour bien distinguer les différentes raies spectrales (*i.e.* les fréquences présentes dans le signal) à la réception ?

13.55 Equation de diffusion de la chaleur

L'équation de diffusion de la chaleur dans le cas mono-dimensionnel est :

$$a \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial f(x, t)}{\partial t}$$

où t est la variable temporelle, x la variable spatiale, $f(x, t)$ la fonction température, et $a > 0$ un coefficient constant caractéristique du matériau.

Le matériau étudié est supposé indéfini suivant la direction Ox (c'est-à-dire qu'il s'agit du cas-limite d'un barreau très fin et très long), de sorte qu'il n'existe qu'une condition initiale à satisfaire : $f(x, 0) = f_0(x)$ correspondant à l'instant $t = 0$.

On désigne par $F(X, t)$ la transformée de Fourier de $f(x, t)$ par rapport à la variable x , t **jouant alors le rôle d'un simple paramètre**.

1. Donner l'image par transformation de Fourier de l'équation de diffusion.
2. Déterminer la transformée de Fourier $F(X, t)$ en fonction de $F_0(X)$, transformée de Fourier de $f_0(x)$.
3. Par application du théorème du produit de convolution (et de celui du changement d'échelle), en déduire la solution temporelle correspondante $f(x, t)$.
4. On donne $f_0(x) = n_0\delta(x)$, où n_0 est une constante positive et où $\delta(x)$ est la fonction impulsion unité de Dirac. Déterminer alors $f(x, t)$. Dessiner sommairement son graphe à trois instants successifs $t_0 = 0 < t_1 < t_2$.
5. Interpréter.

13.56 Filtrage numérique

On étudie un système numérique réalisant un filtre passe-bas du premier ordre entre le signal d'entrée $e(n)$ et le signal de sortie $s(n)$:

$$s(n) = a.s(n-1) + (1-a).e(n-1)$$

1. Dessiner le schéma du circuit numérique implantant ce filtre.
2. Déterminer la fonction de transfert en z , $H(z)$, associée à ce système.
3. En déduire la réponse impulsionnelle $h(n)$ du système et la représenter ($0 < a < 1$).
4. A.N. : $a = 1/4$.
5. Mêmes questions que ci-dessus pour : $s(n) + 5.s(n-1) = e(n-2) + 3.e(n)$. Conclusion ?

13.57 Transformation directe et inverse

1. Calculer les TZ de $\cos \omega t$ et $\sin \omega t$.
2. Calculer l'original de $\phi(p) = \frac{1}{p^2(p+1)}$ puis calculer $F(z)$.
3. Montrer que, si $F(z) = Z[f(t)]$, alors $Z\left[\sum_{k=0}^n f(kT_e)\right] = \frac{z}{z-1}F(z)$. Interprétation ?

4. Rechercher l'original de $F(z) = \frac{3z^3-12z^2+11z}{(z-1)(z-2)(z-3)}$, c'est-à-dire retrouver les échantillons $f(nT_e)$ par deux méthodes différentes :
 - division selon les puissances croissantes de z^{-1}
 - décomposition de la fraction en éléments simples.
5. Soit $F(z) = \frac{T_e z}{(z-1)^2}$, où T_e est une période d'échantillonnage. En utilisant la formule d'inversion par la méthode des résidus, retrouver l'original $f(t)$, c'est-à-dire la valeur des échantillons $f(nT_e)$.

13.58 Echantillonnage

1. Soit le signal analogique non causal $s(t) = t + 1$. Le représenter.
2. On considère son échantillonnage à la période $T_e = 0.5s$. Représenter le signal échantillonné $s^*(t)$.
3. Soit $s_1(t) = s(t)\mathcal{U}(t)$. Représenter $s_1^*(t)$ le signal échantillonné et calculer sa transformée en z .
4. Même question pour : $s_2(t) = s(t+1)\mathcal{U}(t)$ et $s_3(t) = s(t-1)\mathcal{U}(t-1)$.

13.59 Résolution d'équation de récurrence par la TZ

Résoudre l'équation linéaire aux différences à coefficients constants :

$$u_n - 3u_{n+1} + u_{n+2} = 0$$

avec pour condition initiale : $u_1 = 2u_0$.

Dans l'expression de la TZ, on prendra, sans perte de généralité : $T_e = 1$

Formulaire :

$$\arg \cosh\left(\frac{3}{2}\right) = \arg \sinh\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right) = 0.9624$$

$f(t)$ où $t = nT_e$	$F(z)$ $= TZ[f(t)]$
$\sinh(\omega_0 t)$	$\frac{z \sinh(\omega_0 T_e)}{z^2 - 2z \cosh(\omega_0 T_e) + 1}$
$\cosh(\omega_0 t)$	$\frac{z[z - \cosh(\omega_0 T_e)]}{z^2 - 2z \cosh(\omega_0 T_e) + 1}$

13.60 Transformée de Laplace

On considère la fonction de transfert composée de deux premiers ordres (où $\tau_1 \leq \tau_0$) :

$$H(p) = \frac{1}{(1 + \tau_0 p)} \times \frac{1}{(1 + \tau_1 p)} \quad (13.13)$$

N.B. : On pourra adopter les notations : $\omega_0 = 1/\tau_0$ et $\omega_1 = 1/\tau_1$.

1. Sachant que :

$$\frac{1}{(p-a)(p-b)} \subset \frac{e^{at} - e^{bt}}{a-b}, \quad (13.14)$$

donner l'original $h(t)$ qui est la réponse impulsionnelle correspondant à $H(p)$.

2. Tracer les courbes de Bode asymptotiques (module et argument de $H(p)$ pour $p = j\omega$) dans le cas où : $\tau_1 = \tau_0/10$.

N.B. : **papier semilog fourni ; prendre $\tau_0 = 0.1$ pour le tracé.**

Bien indiquer les pulsations de transition, les pentes, les gains et phases caractéristiques.

3. En notant :

$$\tau = \sqrt{\tau_0 \tau_1} \quad \text{et} \quad \zeta = \frac{1}{2} \frac{\tau_0 + \tau_1}{\sqrt{\tau_0 \tau_1}}$$

exprimer $H(p)$ en fonction de la variable p et des seuls paramètres ζ et τ .

4. On se place désormais dans le cas où : $\tau_1 = \tau_0$.

Calculer le paramètre ζ qu'on appelle facteur d'amortissement.

5. Tracer les courbes de Bode asymptotiques correspondant à ce cas.

6. Que vaut alors le module (en dB) pour la pulsation : $\omega = 1/\tau_0$?

7. Chercher la pulsation de coupure ω_c à -3dB. La placer sur la courbe de Bode.

8. De quel type de filtre fréquentiel s'agit-il ?

9. Comment sera modifié le signal en sortie, si l'entrée est une sinusoïde $e(t) = A \sin(\omega t)$ d'amplitude $A = 1$ et de pulsation $\omega = 10\omega_c$?

13.61 Transformée de Fourier

Le filtre électronique de la Fig. 13.13 a pour fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{1}{1 + RCp} \quad (13.15)$$

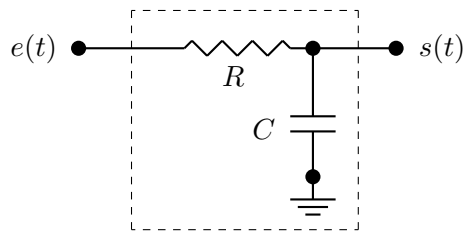


FIGURE 13.13 – Filtre RC.

1. Calculer et tracer l'allure de sa réponse impulsionnelle $h(t)$.
2. Donner sa constante de temps τ .
3. On pose $p = j2\pi\nu$ où ν est la fréquence.
Dédurre de l'expression de $H(p)$ que la transformée de Fourier $H(\nu)$ correspondante se met sous la forme :

$$H(\nu) = \frac{1}{1 + j\frac{\nu}{\nu_c}} \quad (13.16)$$

et exprimer ν_c en fonction de R et C .

4. Exprimer le module et l'argument de $H(\nu)$.
5. Soit un signal d'entrée : $e(t) = A \cos(2\pi\nu_0 t)$ (tension sinusoïdale).
Exprimer sa transformée de Fourier $E(\nu)$.
6. Pour $\nu = \nu_0$, on pose : $H_0 = |H(\nu_0)|$ et $\Phi_0 = \text{Arg}[H(\nu_0)]$.
Expliciter les valeurs de H_0 et Φ_0 en fonction du rapport ν_0/ν_c .
7. Dédurre de 4, 5 et 6 la transformée de Fourier $S(\nu)$ du signal de sortie du filtre.
8. Montrer alors que la sortie s'exprime par :

$$s(t) = B \cos(2\pi\nu_0 t + \Phi_0) \quad \text{avec} \quad B = AH_0 \quad (13.17)$$

9. Décrire qualitativement le double effet du filtrage (sur l'amplitude et sur la phase) :
 - pour les basses fréquences : $\nu_0 \ll \nu_c$ (à quoi équivaut alors $s(t)$?)
 - pour les hautes fréquences : $\nu_0 \gg \nu_c$ (vers quoi tend alors $s(t)$?)
10. Comment se traduit dans le domaine temporel un déphasage entre deux signaux ?
Illustrer graphiquement l'effet du filtre sur les signaux temporels.
11. Si l'on souhaite atténuer fortement le signal d'entrée (typiquement $B = \varepsilon A$ avec $\varepsilon \ll 1$), comment choisir ν_c en fonction de ν_0 ?
A.N. : Calculer ν_c pour $\nu_0 = 1 \text{ kHz}$ et $\varepsilon = 1\%$.

Rappels :

$$f(\nu)\delta(\nu - \nu_0) = f(\nu_0)\delta(\nu - \nu_0) \quad (13.18)$$

$$\delta(\nu - \nu_0) = TF[e^{j2\pi\nu_0 t}] \quad (13.19)$$

13.62 Transformée en Z

On considère la fonction de transfert en Z d'un système numérique :

$$H(z) = \frac{2z}{(z-1)(z-\frac{1}{2})} \quad (13.20)$$

1. Calculer la réponse impulsionnelle du filtre $h(n)$.
2. Tracer $h(n)$ pour $n \geq 0$
3. Donner l'équation de récurrence du filtre (qui respecte le principe de **causalité**).

On notera $e(n)$ et $s(n)$ les échantillons en entrée et en sortie à l'instant courant $t = nT_e$ (période d'échantillonnage normalisée $T_e = 1$).

4. Dessiner le circuit numérique implantant ce filtre.
5. Ce filtre numérique est-il stable ? Pourquoi ?
6. Conclure sur son intérêt pratique.

13.63 Transformée de Laplace

On considère le filtre analogique (système ou boîte noire) régi par l'équation différentielle :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2a\frac{dy}{dt} + (a^2 + b^2)y(t) = bx(t)$$

où $x(t)$ et $y(t)$ sont l'entrée et la sortie du filtre. On suppose les conditions initiales nulles.

A.N. : on prend : $a = \frac{1}{2} \log 2$ (logarithme népérien) et $b = \frac{\pi}{4}$.

1. Calculer la fonction de transfert du filtre $H(p)$.
2. En déduire sa réponse impulsionnelle $h(t)$.
3. Tracer sommairement l'allure temporelle de ce signal.
4. Le système est-il stable ? Justifier.
5. Ecrire $H(p)$ sous la forme canonique d'un système du 2^e ordre :

$$H(p) = \frac{K}{1 + 2\zeta\tau p + \tau^2 p^2}$$

en explicitant les valeurs du gain statique K , de l'amortissement ζ et de la constante de temps τ en fonction de a et b .

6. Exprimer la réponse harmonique du filtre $H(j\omega)$ en fonction de ζ et de la pulsation propre $\omega_n = 1/\tau$.
7. **A.N.** : Calculer les valeurs numériques de ζ et ω_n .
8. En s'aidant des abaquages théoriques, tracer sommairement les courbes de Bode du système (gain et phase en fonction de la pulsation). Que valent le gain statique, la surtension et la fréquence de coupure ?

13.64 Transformée en Z

On souhaite réaliser un filtre numérique équivalent au filtre analogique précédent, au sens où l'on veut une réponse impulsionnelle échantillonnée équivalente. La période d'échantillonnage est normalisée : $T_e = 1$.

1. A partir de la connaissance de $h(t)$, déduire l'expression de la fonction de transfert en z équivalente $H(z)$.
2. Monter qu'elle peut s'exprimer selon les puissances de z^1 sous la forme :

$$H(z) = \frac{z^{-1}}{2 - 2z^{-1} + z^{-2}} \quad (13.21)$$

3. A partir de l'Eq. (13.21), trouver l'équation aux différences (équation de récurrence) qui régit le filtre numérique.
4. En déduire le schéma du circuit numérique réalisant ce filtre à l'aide d'additionneurs, de retards purs, d'amplificateurs etc.
5. En prenant en entrée une impulsion unitaire (suite d'échantillons : $x(0) = 1$ et $x(1) = x(2) = \dots = x(n) \dots = 0$), calculer la sortie du filtre $y(n)$, $\forall n \in [0, 12]$.
6. Tracer cette réponse $y(n)$ et la comparer à l'allure de la réponse impulsionnelle du filtre analogique $h(t)$. Conclure.

13.65 Calcul de transformées de Laplace

Déterminer les transformées de Laplace des 4 fonctions suivantes définies pour $t \geq 0$:

1. $f_1(t) = \sin(3t) \cos(2t)$
2. $f_2(t) = t^2 \sin(\omega t)$
3. $f_3(t) = (\sin t - \cos t)^2$
4. $f_4(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } 0 \leq t < 2 \\ (t-2)^3 & \text{pour } t \geq 2 \end{cases}$

N.B. : On explicitera pour chaque cas les règles opératoires et les transformées usuelles utilisées.

13.66 Calcul d'un original

Déterminer l'original $g(t)$ de la transformée de Laplace suivante :

$$G(p) = \frac{Ap + a}{(p + a)^2 + b^2}$$

où A , a et b sont trois constantes réelles.

13.67 Etude d'une fonction périodique

Soit la fonction périodique et causale $f(t)$ définie graphiquement Fig. 13.14.

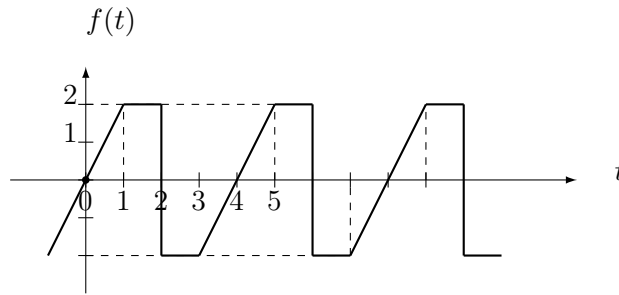


FIGURE 13.14 – Fonction périodique $f(t)$.

1. Que vaut sa période T ?
2. Soit $m(t)$ le motif de base correspondant à la première période, c'est-à-dire que $m(t) = f(t)$ pour $0 \leq t \leq T$ et $m(t) = 0$ partout ailleurs. Dessiner $m(t)$.
3. A l'aide de la fonction échelon unité de Heaviside $\mathcal{U}(t)$, exprimer $m(t)$ comme une somme de fonctions linéaires définies par morceaux et décalées temporellement, c'est-à-dire sous la forme :

$$m(t) = \sum_{n=0}^T (a_n t + b_n) \mathcal{U}(t - n)$$

où a_n et b_n sont des coefficients constants à déterminer.

4. Dédurre de l'expression ci-dessus la transformée de Laplace $M(p)$ de $m(t)$.
5. Sachant qu'on peut exprimer $f(t)$ à partir de $m(t)$ sous la forme :

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} m(t - kT)$$

en déduire une expression de la transformée de Laplace $F(p)$ de $f(t)$.

- En utilisant les notions sur la convergence des séries géométriques, en déduire qu'on peut exprimer $F(p)$ sous la forme simplifiée :

$$F(p) = \frac{M(p)}{1 - e^{-4p}}$$

- Pour finir, calculer le DSF de la fonction périodique $f(t)$ définie ci-dessus (Fig. 13.14), en supposant ici que la fonction n'est pas nulle pour $t < 0$, mais toujours périodique. Commentaires ?

13.68 Transformée de Fourier

Soit un signal sinusoïdal $e(t) = A \cos(2\pi\nu_1 t)$ en entrée d'un filtre passe-bas du premier ordre de réponse impulsionnelle $h(t) = \frac{1}{\tau} \exp(-t/\tau) \mathcal{U}(t)$ où $\tau = 1s$ est la constante de temps et où $\mathcal{U}(t)$ représente l'échelon unité de Heaviside.

- Donner la transformée de Fourier $H(\nu)$ de la réponse impulsionnelle.
- Exprimer $H(\nu)$, qui est une grandeur complexe, sous la forme module et argument, en adoptant la notation simplificatrice $\nu_0 = 1/(2\pi\tau)$.
- Calculer la transformée de Fourier $S(\nu)$ de la sortie $s(t)$ du filtre de la Fig. 13.15, sachant que la théorie des systèmes stipule que la sortie temporelle est donnée par le produit de convolution de l'entrée par la réponse impulsionnelle : $s(t) = e(t) * h(t)$.
- Si le signal en entrée a pour fréquence $\nu_1 = 50Hz$ et amplitude $A = 1$, que vaudra l'amplitude du signal de sortie ?

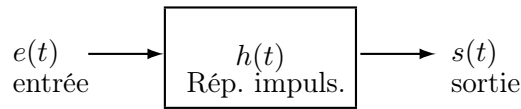


FIGURE 13.15 – Filtre.

13.69 Série entière

On considère la série entière $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général $u_n = (n+1)x^n$, où x est une variable réelle.

- En utilisant le critère de d'Alembert, que conclure sur la convergence de cette série ?

2. Quel est son rayon de convergence R ?
3. Démontrer que cette série a pour somme :

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Idée [15] : on pourra développer la somme des N premiers termes de la série, et trouver un lien avec la somme partielle d'une série géométrique de raison x , dont on connaît les propriétés.

13.70 Décomposition en série de Fourier

On considère la fonction **impaire** $f(t)$ de période $2L$ définie sur sa demi-période $[0, L]$ par :

$$f(t) = A \quad \text{pour} \quad 0 < t < L/2 \quad (13.22)$$

$$f(t) = 0 \quad \text{pour} \quad L/2 < t < L \quad (13.23)$$

1. Tracer la fonction $f(t)$ sur une période complète $[-L, +L]$ (A étant une constante positive).
2. Calculer les coefficients de Fourier de cette fonction [15].
3. Exprimer alors la fonction $f(t)$ par son DSF sous forme synthétique ($f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \dots$), puis sous forme développée en explicitant les 7 premiers termes.
4. Représenter graphiquement les fréquences présentes dans ce signal, et leur amplitude. Interpréter.

13.71 Transformée de Laplace : résolution d'équation différentielle

Résoudre, par transformation de Laplace, l'équation différentielle (ED) suivante [12], portant sur la fonction $y(t)$ causale :

$$y''(t) - y'(t) - 2y(t) = te^t$$

sous les conditions initiales (CI) : $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

1. On notera $Y(p)$ la transformée de Laplace de $y(t)$. On montrera que $Y(p)$ est une fraction rationnelle qu'on exprimera. On vérifiera qu'elle se décompose en éléments simples sous la forme :

$$Y(p) = \frac{A}{(p-1)^2} + \frac{B}{p-1} + \frac{C}{p+1} + \frac{D}{p-2}$$

où $A = -1/2$; $B = -1/4$; $C = 7/12$ et $D = 2/3$.

2. On en déduira la solution $y(t)$. Vérifier que la fonction obtenue est bien solution de l'ED.

13.72 Transformée de Fourier : signal triangle

On considère la fonction $f(t)$ définie par (A et T étant 2 constantes positives) :

$$f(t) = \frac{A}{T}t + A \quad \text{pour} \quad -T < t < 0 \quad (13.24)$$

$$f(t) = -\frac{A}{T}t + A \quad \text{pour} \quad 0 < t < T \quad (13.25)$$

1. Tracer la fonction $f(t)$ sur tout l'axe réel. N.B. : $f(t) = 0$ hors de l'intervalle $[-T; T]$
2. Calculer sa transformée de Fourier $F(\nu)$. Tracer l'allure de $F(\nu)$ en fonction de la fréquence ν .

13.73 DSF alternance positive

Soit la fonction $s(t)$ de la Fig. 13.16, représentative d'un signal électrique sinusoïdal redressé en simple alternance, d'amplitude crête A et de période $T = 2\pi/\omega_0$.

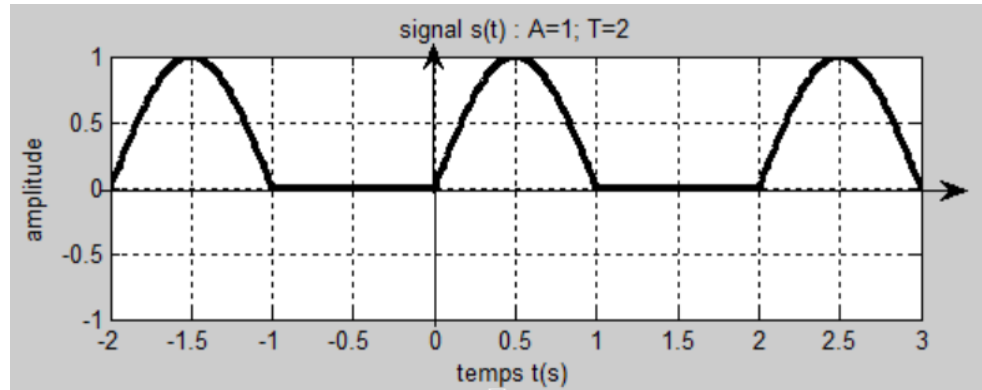


FIGURE 13.16 – Signal $s(t)$ obtenu par redressement simple alternance d'une sinusoïde.

1. Démontrer par le calcul que le DSF de la fonction $s(t)$ vaut :

$$s(t) = A \left[\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin \omega_0 t - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2n\omega_0 t)}{4n^2 - 1} \right] \quad (13.26)$$

N.B. : pour le calcul des coefficients a_k et b_k , utiliser les formules de trigonométrie. Et faire attention au calcul particulier de b_k pour $k = 1$!

2. Préciser quels sont les harmoniques présents et comment décroît leur amplitude par rapport à celle du fondamental.
3. Dessiner sommairement les raies spectrales du signal (amplitude des harmoniques en fonction de la pulsation).

13.74 Reconstitution d'un signal échantillonné : TFD

1. Calculer la transformée de Fourier $S(\nu)$ du signal $s(t)$ étudié en section 13.73¹.
N.B. : pour cela, on notera $\omega_0 = 2\pi\nu_0$ et on utilisera la linéarité de la TF.
2. Représenter graphiquement $|S(\nu)|$, spectre de $s(t)$. N.B. : prendre $A = 2$ et $\pi \approx 3$ pour le tracé.
3. On échantillonne $s(t)$ à la fréquence d'échantillonnage F_e . On note $v(t)$ ce signal échantillonné ; on rappelle qu'il s'obtient en multipliant le signal par un peigne de Dirac $p(t)$ de période T_e :

$$v(t) = s(t).p(t) = s(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e)$$

Exprimer $V(\nu)$, transformée de Fourier du signal échantillonné $v(t)$.

4. Représenter graphiquement l'allure de $|V(\nu)|$, spectre de $v(t)$.
5. Peut-on proposer a priori une valeur correcte pour F_e ? Justifier la réponse.
6. En première approximation, on suppose que le spectre de $s(t)$ est borné. Pour cela, on néglige les harmoniques véhiculant une **énergie inférieure à $1/100^{eme}$ de celle du fondamental**.

Rappeler les définitions générales de la valeur efficace d'un signal et de son énergie.

Traduire alors la condition d'énergie négligeable en terme de valeur efficace des harmoniques.

7. Quel est le premier harmonique que l'on peut négliger ?
Quelle est donc l'amplitude de l'erreur tolérée sur $s(t)$, erreur due à ce seul harmonique ?
8. Le signal approximé à spectre borné est noté $s_b(t)$.
Exprimer et représenter graphiquement $S_b(\nu)$ et $V_b(\nu)$, spectres respectifs de $s_b(t)$ analogique et de $s_b(t)$ échantillonné.

1. Les 2 exercices des sections 13.73 et 13.74 forment un tout qui peut constituer les 2 questions de l'énoncé d'un seul sujet global.

9. On filtre $s(t)$ pour être sûr d'obtenir un spectre borné grâce à un filtre passe-bas. Quelle est la condition sur F_e pour que le signal analogique $s_b(t)$ soit reconstituable (sans phénomène de repliement de spectre) ?
10. On veut utiliser le filtre passe-bas de la Fig. 13.17 pour la reconstitution du signal.
Quelles sont les fréquences F_e et ν_c (coupure du filtre) les plus basses que l'on pourra utiliser ?

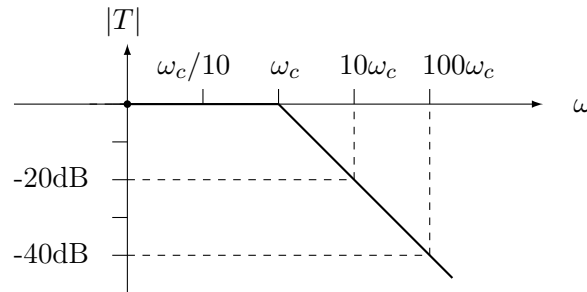


FIGURE 13.17 – Filtre passe-bas : courbe de gain en dB (pulsation de coupure $\omega_c = 2\pi\nu_c$).

13.75 TL : circuit RL série excité par une rampe

Le circuit de la Fig. 13.6 (p. 201) est régi par l'équation :

$$e(t) = Ri(t) + L \frac{di}{dt} \quad (13.27)$$

où $e(t)$ est la tension d'excitation du circuit et $i(t)$ le courant. On suppose la condition initiale nulle : $i(0) = 0$. On veut calculer et tracer $i(t)$ (pour $t \geq 0$) quand $e(t) = t\mathcal{U}(t)$ est une rampe de pente $\alpha = 1$ (où $\mathcal{U}(t)$ représente l'échelon unité de Heaviside).

1. En utilisant les TL, exprimer $I(p)$ en fonction de $E(p)$.
2. Que vaut $E(p)$?
3. Montrer que l'on peut décomposer $I(p)$ comme suit :

$$I(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{R + Lp}$$

avec : $A = -L/R^2$, $B = 1/R$ et $C = (L/R)^2$.

4. En déduire l'expression de la fonction $i(t)$.

5. A.N. : on prend $R = 2k\Omega$, $L = 100\mu H$. Que vaut la constante de temps τ du circuit ?
6. Tracer sommairement les graphes de $e(t)$ et $i(t)$ en fonction du temps.

13.76 Développement en série de Fourier

On veut calculer le DSF d'un signal sinusoïdal mono-alternance, dont on n'a conservé que les alternances négatives (Fig. 13.18).

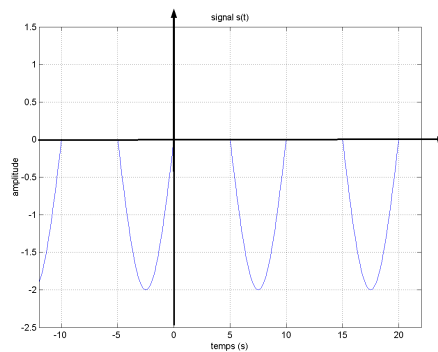


FIGURE 13.18 – Alternances négatives d'une sinusoïde.

1. Préciser la valeur de la période T_0 , de la fréquence fondamentale f_0 , de la pulsation fondamentale ω_0 et de l'amplitude crête A_0 de ce signal.
2. Donner les équations définissant le signal sur une période.
3. Calculer sa composante continue a_0 .
4. Calculer le premier coefficient a_1 du DSF (cas particulier pour $k = 1$).
5. Déterminer la valeur des autres coefficients a_k des termes en cosinus (pour $k > 1$).
N.B. : On distinguera bien les termes pairs (pour $k = 2n$) des termes impairs (pour $k = 2n + 1$).
6. Calculer le coefficient b_1 du DSF (cas particulier pour $k = 1$).
7. Montrer que tous les autres coefficients b_k des termes en sinus (pour $k > 1$) valent zéro.
8. En déduire l'expression littérale du DSF complet du signal.
9. Faire une représentation graphique sommaire du DSF (amplitudes des diverses composantes sinusoïdales en fonction des pulsations).
10. Commenter ce spectre et conclure (on pourra comparer au cas connu du redressement positif).

13.77 Application de la transformée de Laplace

Un circuit RL série est un système régi par une équation différentielle linéaire du 1er ordre :

$$u(t) = R i(t) + L \frac{di}{dt} \quad (13.28)$$

où $u(t)$ est la tension appliquée en entrée du circuit et $i(t)$ le courant circulant dans le circuit, considéré ici comme étant la sortie du système.

On suppose la condition initiale nulle : $i(0) = 0$.

On note $I(p)$ et $U(p)$ les TL respectives de $i(t)$ et de $u(t)$.

En appliquant la transformation de Laplace à l'équation différentielle, calculer la réponse $i(t)$ dans les 2 cas suivants :

1. Quand la tension entrée $u(t)$ est un échelon d'amplitude A :
 $u(t) = A\mathcal{U}(t)$, où $\mathcal{U}(t)$ représente l'échelon unité de Heaviside.
2. Quand la tension d'entrée $u(t)$ est une rampe causale de pente α :
 $u(t) = \alpha t$ pour $t \geq 0$ (et $u(t) = 0$ pour $t < 0$).
3. A.N. : on prend $R = 2k\Omega$, $L = 100\mu H$.

Tracer les réponses temporelles dans les 2 cas (graphes de $i(t)$ en fonction du temps).

4. Commenter les courbes obtenues, en comparant l'allure de $i(t)$ avec celle de $u(t)$.

13.78 Calcul d'une transformée de Fourier

Soit $f(t)$ la fonction définie graphiquement par la Fig. 13.19.

Elle correspond à une fonction exponentielle décroissante de type $e^{-t/\tau}$, avec une constante de temps $\tau = 2$ et démarrant en retard à l'instant $t_0 = 1$ (elle est nulle pour $t < t_0$).

1. Ecrire l'équation de définition de $f(t)$.
 N.B. : On utilisera la notation de l'échelon unité de Heaviside qui permet de traduire la nullité d'une fonction avant son instant de démarrage.
2. En utilisant le tableau des TF des fonctions usuelles, et en appliquant 2 des propriétés de la TF (la règle du changement d'échelle et la règle du retard temporel), déterminer l'expression de la transformée de Fourier $F(\nu)$ de $f(t)$.
3. Exprimer le module $|F(\nu)|$ et le représenter graphiquement (fréquence ν en abscisse, module en ordonnée).
4. Exprimer l'argument $Arg[F(\nu)]$ et représenter graphiquement la courbe de phase correspondante. Conclure.

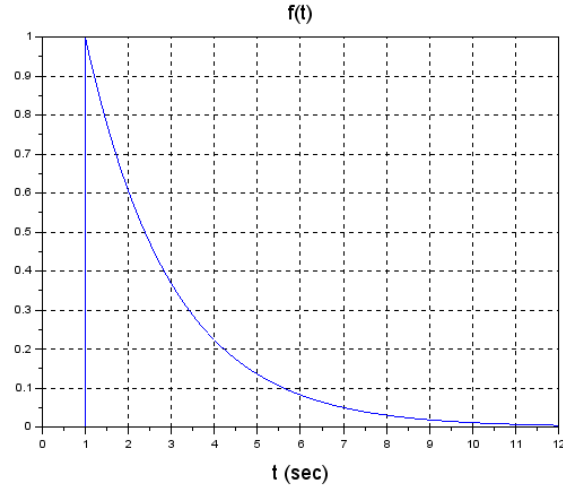


FIGURE 13.19 – Fonction exponentielle décroissante retardée.

13.79 Série de Fourier : étude de pompe à pistons

Les constructeurs de pompes (Fig. 13.20) affirment que le débit est plus régulier si le nombre p de pistons est impair. On se propose de vérifier cette affirmation dans les cas $p = 3$ et $p = 4$. Cette exercice est extrait de [16].

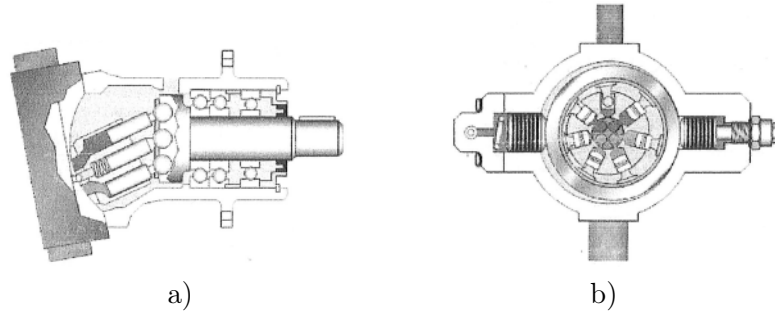


FIGURE 13.20 – Pompes à piston à cylindrée variable : a) à axe brisé ; b) radiale.

Soit f la fonction périodique de période 2π définie par :

$$f(t) = \sin(t) \quad \text{pour : } 0 \leq t < \pi \quad (13.29)$$

$$f(t) = 0 \quad \text{pour : } \pi \leq t < 2\pi \quad (13.30)$$

13.79.1 Etude du cas $p = 3$

Les débits élémentaires q_1 , q_2 et q_3 des trois cylindres sont donnés par les 3 fonctions décalées entre elles de $2\pi/3$:

$$q_1(t) = f(t) \quad q_2(t) = f\left(t + \frac{2\pi}{3}\right) \quad q_3(t) = f\left(t + \frac{4\pi}{3}\right)$$

Le débit global Q_3 de la pompe est la somme des débits des pistons :

$$Q_3(t) = q_1(t) + q_2(t) + q_3(t).$$

On démontre alors de manière triviale que :

- Q_3 est périodique de période $2\pi/3$, c'est-à-dire que : $Q_3(t) = Q_3(t + \frac{2\pi}{3})$
 - pour $t \in [0; \frac{\pi}{3}]$: $Q_3(t) = \sin(t + \pi/3)$
 - pour $t \in [\pi/3; 2\pi/3]$: $Q_3(t) = \sin(t)$
1. Dessiner sommairement q_1 , q_2 et q_3 sur l'intervalle $[-2\pi; 2\pi]$.
 2. Préciser les valeurs de $Q_3(t)$ pour $t = 0$, $t = \pi/3$ et $t = 2\pi/3$.
 3. Donner la représentation graphique de Q_3 sur $[-2\pi; 2\pi]$.

13.79.2 Etude du cas $p = 4$

Dans ce cas, le débit de la pompe vaut :

$$Q_4(t) = f(t) + f(t + \frac{\pi}{2}) + f(t + \pi) + f(t + \frac{3\pi}{2}).$$

1. Montrer que Q_4 a pour période $\pi/2$.
2. Montrer que pour $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$: $Q_4(t) = \sqrt{2} \sin(t + \frac{\pi}{4})$.
3. Préciser les valeurs de $Q_4(t)$ pour $t = 0$ et $t = \pi/4$.
4. Donner la représentation graphique de Q_4 sur $[-2\pi; 2\pi]$.

13.79.3 Etude du taux d'irrégularité du débit

Le taux d'irrégularité du débit est défini par :

$$\theta_p = \frac{Q_{pmax} - Q_{pmin}}{Q_{p moy}}$$

1. Calculer le débit moyen d'un cylindre élémentaire, c'est-à-dire la valeur moyenne de f sur $[0; 2\pi]$.
2. En déduire le débit moyen $Q_{p moy}$ de la pompe pour $p = 3$ et $p = 4$.
3. Déterminer également les valeurs mini et maxi de Q_3 et Q_4 .
4. En utilisant les résultats précédents, calculer θ_3 et θ_4 . Vérifier que $\theta_3 < \theta_4$.

13.79.4 Etude du cas $p = 4$ à l'aide des séries de Fourier

1. Calculer les coefficients de Fourier de la fonction $f(t)$.
N.B. : Pour le calcul des intégrales, on utilisera les formules de linéarisation de trigonométrie concernant $\sin a \sin b$ et $\sin a \cos b$.
Ecrire alors le DSF de $f(t)$.
2. En déduire les développements en série de Fourier des trois fonctions décalées $f(t + \frac{\pi}{2})$, $f(t + \pi)$, et $f(t + \frac{3\pi}{2})$.
3. En déduire que :

$$Q_4(t) = \frac{4}{\pi} - \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{16k^2 - 1} \cos(4kt)$$

4. Tracer sommairement le spectre de fréquences correspondant et interpréter.
5. Calculer par ailleurs le DSF de $Q_3(t)$. Comparer et conclure.

13.80 Transformée de Laplace : étude de cuve de mélange

M. Lavinas, œnologue averti, spécialiste des vins du Pays Basque, a décidé de faire lui-même ses assemblages à partir des cépages Tannat et Cabernet franc (qui donnent le célèbre vin rouge Irouleguy²). Pour cela, il a mis au point dans la cave de sa ferme l'appareil schématisé Fig. 13.21 (extrait de [16]).

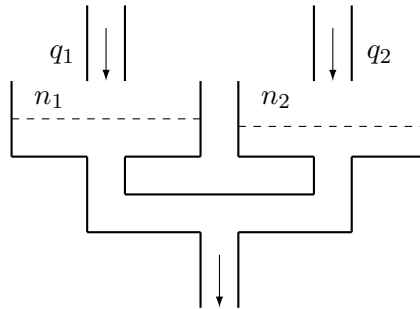


FIGURE 13.21 – Mélangeur de cuve.

— Le système est composé de 2 bacs cylindriques se vidant dans une même conduite. Le bac de gauche contient le Tannat, celui de droite le Cabernet.

2. Les mauvaises langues traduisent le mot basque *irouleguy* par vinaigre en français.

- Les signaux d'entrée sont les débits q_1 et q_2 et les signaux de sortie sont les niveaux n_1 et n_2 correspondants.
- Il s'agit donc d'un système ayant deux entrées et deux sorties.

Dans ce problème, la modélisation mathématique du phénomène se traduit par le système différentiel (S) :

$$n_1'(t) = q_1(t) - 2n_1(t) + n_2(t) \quad (13.31)$$

$$n_2'(t) = q_2(t) + n_1(t) - 2n_2(t) \quad (13.32)$$

où t est un réel positif ou nul, représentant la variable temps.

13.80.1 Conditions initiales nulles

Dans cette première partie, on suppose : $n_1(0^+) = 0$; $n_2(0^+) = 0$.

1. Démontrer en appliquant la transformation de Laplace au système (S) que l'on a :

$$N_1(p) = \frac{(p+2)Q_1(p) + Q_2(p)}{(p+1)(p+3)} \quad (13.33)$$

$$N_2(p) = \frac{Q_1(p) + (p+2)Q_2(p)}{(p+1)(p+3)} \quad (13.34)$$

où $N_1(p)$; $N_2(p)$; $Q_1(p)$; $Q_2(p)$ sont les transformées de Laplace respectives de $n_1(t)$; $n_2(t)$; $q_1(t)$; $q_2(t)$.

2. Calculer $n_1(t)$ et $n_2(t)$ dans le cas où $q_1(t) = q_2(t) = \mathcal{U}(t)$, échelon unité de Heaviside.
3. Représenter graphiquement la réponse $n_1(t)$ sans étudier la fonction.
4. Calculer $n_1(t)$ et $n_2(t)$ dans le cas où $q_1(t) = 0$ et $q_2(t) = \mathcal{U}(t)$.

13.80.2 Condition initiale non nulle

Dans cette partie, le signal d'entrée $q_1(t)$ est l'impulsion unité $\delta(t)$ et le signal d'entrée $q_2(t)$ est la fonction nulle. Dans ces conditions, le phénomène est régi par le système différentiel :

$$n_1'(t) + 2n_1(t) - n_2(t) = 0 \quad (13.35)$$

$$n_2'(t) - n_1(t) + 2n_2(t) = 0 \quad (13.36)$$

$$\text{avec : } n_1(0^+) = 1 \quad ; \quad n_2(0^+) = 0 \quad (13.37)$$

1. Appliquer la transformation de Laplace au système donné ci-dessus et déterminer $N_1(p)$ et $N_2(p)$.

2. Déterminer les fonctions $n_1(t)$ et $n_2(t)$ solutions de ce système.
3. Etudier pour finir les fonctions définies sur $[0; +\infty[$ par :

$$f_1 : t \rightarrow f_1(t) = e^{-t} + e^{-3t} \quad (13.38)$$

$$f_2 : t \rightarrow f_2(t) = e^{-t} - e^{-3t} \quad (13.39)$$

On calculera évidemment les limites et dérivées de ces deux fonctions, et on tracera sommairement l'allure des deux courbes.

On déterminera notamment la valeur exacte du maximum de la fonction f_2 et on précisera la position relative des deux courbes lorsque $t \rightarrow +\infty$.

4. Expliquer le lien de l'étude des fonctions f_1 et f_2 avec la question 2 précédente.

13.81 Transformée de Fourier d'une sinusoïde amortie exponentiellement

Soit la fonction du temps t , causale (nulle pour $t < 0$), définie par :

$$f(t) = \exp(-at) \cos(\omega t) \mathcal{U}(t)$$

où $\mathcal{U}(t)$ représente l'échelon unité de Heaviside, et où a et ω sont des paramètres réels positifs.

On pourra poser $\omega = 2\pi\nu_0$, où ν_0 dénote la fréquence de la sinusoïde.

1. Dessiner l'allure du graphe temporel de la fonction $f(t)$.
2. A l'aide des tables de transformées, calculer sa transformée de Fourier $F(\nu)$.

A.N. : $a = 0.2$; $\omega = 1$; $t \in [0; 20]$.

13.82 Développement en série de Fourier

1. Soit la fonction périodique de période T définie par :

$$f(t) = A \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \text{ pour } t \in \left[-\frac{T}{2}; 0\right] \quad (13.40a)$$

$$f(t) = 0 \text{ pour } t \in \left[0; \frac{T}{2}\right] \quad (13.40b)$$

Calculer son développement en série de Fourier (DSF).

On pourra adopter la notation : $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ pour alléger l'écriture.

2. Représenter succinctement son spectre fréquentiel (amplitude des raies en fonction des pulsations).

A.N. : $A = 2$; $T = 2\pi$.

13.83 Transformée de Laplace

1. Soit un système régi par l'équation différentielle :

$$a \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = e(t) \quad (13.41)$$

où $e(t)$ est l'entrée du système et $s(t)$ la sortie ; a est un paramètre réel positif.

On suppose les conditions initiales nulles.

On note $S(p)$ et $E(p)$ les TL respectives de $s(t)$ et $e(t)$.

Exprimer $S(p)$ en fonction de $E(p)$ et du paramètre a .

2. En déduire la réponse $s(t)$ quand l'entrée $e(t)$ est une rampe causale de pente $b > 0$:

$$e(t) = b \times t \quad \text{pour} \quad t \geq 0 \quad (13.42a)$$

$$e(t) = 0 \quad \text{pour} \quad t < 0. \quad (13.42b)$$

3. Tracer sur un même graphe en fonction du temps t , l'allure de la sortie $s(t)$ et de l'entrée $e(t)$.

A.N. : $a = 1$; $b = 2$.

13.84 Transformée de Laplace : résolution d'équation différentielle

Objectif : Résoudre, par transformation de Laplace, l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 3y(t) = 5 \exp(-2t)$$

avec des conditions initiales nulles. On note $Y(p)$ la transformée de Laplace de la fonction causale $y(t)$.

1. Ecrire l'image par transformée de Laplace de l'équation différentielle.
2. Exprimer alors la solution image $Y(p)$.
3. Déterminer les pôles de la fraction $Y(p)$, c'est-à-dire les valeurs de p annulant son dénominateur.
4. Décomposer ensuite la fraction $Y(p)$ en éléments simples.
5. En déduire la solution originale $y(t)$.
6. Vérifier que les conditions initiales $y(0)$ et $y'(0)$ sont bien nulles.

13.85 Développement en série de Fourier

Objectif : Déterminer le développement en série de Fourier de la fonction périodique de période T définie sur $[-T/2; +T/2]$ par l'équation :

$$f(t) = \frac{A}{T}t$$

où A est une constante. Pour les calculs, on conseille d'adopter la notation usuelle : $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$.

A.N. : Pour l'application numérique, prendre : $A = 4$ et $T = 2$.

1. Exprimer d'abord le coefficient a_0 et les autres coefficients a_n pour $n > 0$. Justifier le résultat.
2. Calculer (par intégration par parties) les coefficients b_n pour $n \geq 1$.
3. Simplifier l'écriture des b_n en exprimant l'alternance de signe.
4. Donner finalement l'expression complète du développement de la fonction $f(t)$.
5. Dessiner l'allure du spectre de fréquences correspondant à ce signal (amplitudes vs. pulsations).
6. Quelles sont les harmoniques effectivement présents ? Comment évolue leur amplitude ?

13.86 Transformée de Fourier : signal triangulaire

Objectif : Trouver la transformée de Fourier de la fonction triangulaire $g(t)$ représentée sur la Fig. 13.22 après avoir choisi l'origine des temps et des ordonnées convenablement.

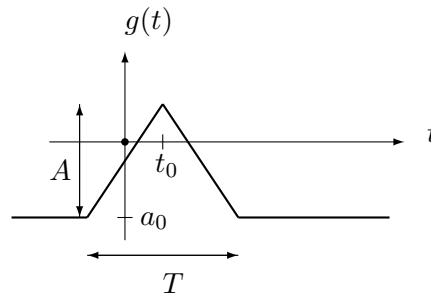


FIGURE 13.22 – Triangle.

1. Indiquer le choix fait pour les valeurs t_0 et a_0 . Donner alors les équations définissant la fonction.

2. Calculer (par intégration par parties) la transformée de Fourier qu'on notera $G(\nu)$.
3. Tracer l'allure du spectre d'amplitude $|G(\nu)|$ en fonction de la fréquence ν .
4. Sachant qu'un triangle de largeur T s'obtient par convolution d'une porte avec elle-même de largeur moitié : $\Pi_{T/2}(t) * \Pi_{T/2}(t)$, peut-on corroborer le résultat obtenu à la question 2 ? Justifier.

13.87 Série de Fourier : application en analyse spectrale

On veut étudier la composition fréquentielle (analyse spectrale) du signal en dents de scie $s(t)$ représenté sur la Fig. 13.23. Pour cela, on va calculer son développement en séries de Fourier.

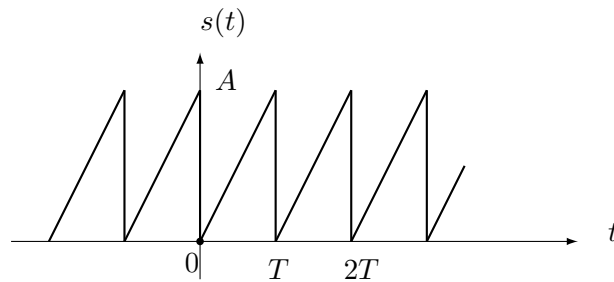


FIGURE 13.23 – Signal temporel en dents de scie $s(t)$.

1. Préciser l'équation de définition du signal $s(t)$ restreint à l'intervalle $[0, T]$.
2. Démontrer que son DSF est de la forme :

$$A_0 - \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{2\pi}{T} nt\right)$$

où l'on donnera la valeur de la constante A_0 et des coefficients C_n qui sont fonction de l'indice n .

3. Dessiner l'allure du spectre de fréquences correspondant à ce signal en dents de scie.
4. Interpréter : quelles sont les fréquences présentes et les amplitudes correspondantes ?
5. Si l'on suppose négligeable toute composante sinusoïdale dont l'amplitude est inférieure à 5% de la valeur de A_0 , combien y-a-t'il de fréquences utiles dans ce signal (c'est-à-dire quelle sera sa bande passante utile) ?

13.88 Calcul de la somme d'une série numérique

On veut exprimer la transformée de Laplace $F(p)$ d'une fonction $f(t)$ causale ($f(t) = 0$ pour $t < 0$) et périodique de période T pour $t \geq 0$. Pour ce faire, on note $m(t)$ le motif de base sur la première période :

$$m(t) = f(t) \quad \text{pour} \quad t \in [0, T] \quad (13.43)$$

$$m(t) = 0 \quad \text{pour} \quad t > T \text{ et } t < 0 \quad (13.44)$$

1. Illustrer par un dessin les graphes de $f(t)$ et de $m(t)$.
2. Exprimer $f(t)$ comme une somme semi-infinie de motifs $m(t)$ retardés (décalés dans le temps en chaque multiple de la période).
3. On note $M(p)$ la TL du motif de base $m(t)$. En utilisant la règle du retard et la linéarité de la TL, exprimer la TL $F(p)$ en fonction de $M(p)$.
4. La somme semi-infinie ainsi obtenue correspond à une série bien connue. Laquelle ?
5. Que vaut son paramètre caractéristique ?
Vérifier le critère qui permet de s'assurer que cette somme converge forcément. Condition sur p ?
6. En déduire la valeur de la somme de la série.
En conclure que l'on a la relation :

$$F(p) = \frac{M(p)}{1 - e^{-pT}}$$

13.89 Transformée de Laplace : étude d'un système du premier ordre

On considère le circuit RC de la Fig. 13.24, avec $R = 1k\Omega$ et $C = 1\mu F$.

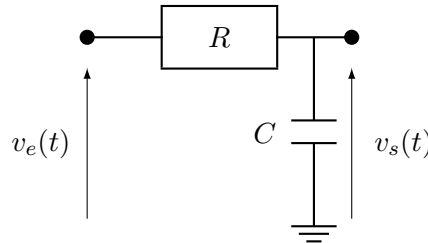


FIGURE 13.24 – Filtre RC.

1. Que vaut la constante de temps τ ?
2. Si l'on utilise la notation complexe en électricité, quel est le rapport complexe $H(j\omega) = \frac{V_s(j\omega)}{V_e(j\omega)}$ en fonction de R , C et de la pulsation ω ?
3. Donner l'équation différentielle caractérisant ce circuit, c'est-à-dire la relation entre l'entrée $v_e(t)$ et la tension de sortie $v_s(t)$.
On pourra si besoin introduire la notation intermédiaire $i(t)$ pour représenter le courant circulant dans les composants R et C .
4. On note $V_e(p)$ et $V_s(p)$ les transformées de Laplace respectives des tensions $v_e(t)$ et $v_s(t)$.
Ecrire la TL de l'équation différentielle, ceci pour des **C.I. nuls**.
5. En déduire la Fonction de Transfert du circuit, c'est-à-dire la transformée de Laplace définie par le rapport : $H(p) = \frac{V_s(p)}{V_e(p)}$.
6. Comparer à ce qu'on aurait obtenu en posant directement $p = j\omega$ dans l'expression de $H(j\omega)$ trouvée plus haut.
7. On veut calculer les réponses du circuit à : un échelon $v_{e1}(t) = \mathcal{U}(t)$; une rampe $v_{e2}(t) = t\mathcal{U}(t)$. Donner d'abord les TL notées $V_1(p)$ et $V_2(p)$ des entrées $v_{e1}(t)$ et $v_{e2}(t)$.
8. Dans chacun des deux cas, exprimer $V_s(p)$ puis décomposer en éléments simples pour en déduire la fonction-original $v_s(t)$ solution.
9. Tracer les graphes des fonctions solutions $v_{s1}(t)$ et $v_{s2}(t)$ pour les 2 cas. Commenter ces courbes.
10. On considère le circuit précédent en échangeant le rôle de R et C : mêmes questions que précédemment pour le nouveau circuit.
En particulier, on démontrera que la fonction de transfert de ce second circuit peut s'exprimer sous la forme :

$$H_2(p) = \frac{\tau p}{1 + \tau p}$$

13.90 Transformée de Fourier

Soit le signal triangulaire de largeur T et d'amplitude A défini par morceaux par la fonction :

$$f(t) = 0 \quad \text{pour} \quad t < -T/2 \quad (13.45)$$

$$f(t) = \frac{2A}{T}(t + T/2) \quad \text{pour} \quad t \in [-T/2; 0] \quad (13.46)$$

$$f(t) = -\frac{2A}{T}(t - T/2) \quad \text{pour} \quad t \in [0; T/2] \quad (13.47)$$

$$f(t) = 0 \quad \text{pour} \quad t > T/2 \quad (13.48)$$

1. Dessiner le graphe de ce signal : $f(t)$ en fonction du temps t .
2. Calculer sa transformée de Fourier qu'on notera $F(\nu)$.
3. Tracer l'allure de son spectre d'amplitude : $|F(\nu)|$ en fonction de la fréquence ν .
4. Commentaire ?

13.91 Oscillateur excité par un signal carré : DSF

La force extérieure $f(t)$ représentée sur la Fig. 13.25 agit sur un oscillateur élémentaire en régime permanent caractérisé par son facteur d'amortissement $\zeta = 0.05$ et par sa pulsation propre ω_0 . L'oscillateur est régi par une EDL du

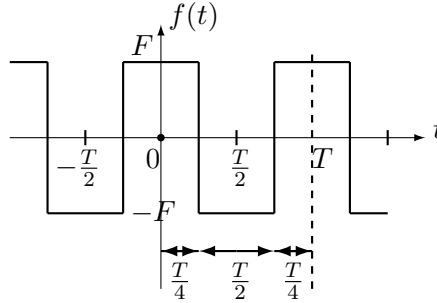


FIGURE 13.25 – Force d'excitation extérieure, rectangulaire périodique.

second ordre, donnant sa position $x(t)$ en fonction de la force appliquée $f(t)$, et faisant intervenir sa masse m , son amortisseur c et son ressort k :

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx(t) = f(t)$$

Sa transmissibilité est une fonction de transfert du 2^e ordre qui donne l'amplitude du déplacement en fonction de l'amplitude de la force d'excitation :

$$X_0 = \frac{F_0}{k} \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + 2\zeta \frac{\omega}{\omega_0} j} \quad (13.49)$$

où la pulsation propre vaut $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et l'amortissement $\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}}$.

1. En utilisant le DSF, donner le spectre de $f(t)$, fonction périodique de période $T = 2\pi/\omega$, d'amplitude F , paire et de valeur moyenne nulle.
2. Chercher ensuite le spectre du déplacement $x(t)$ dans les 2 cas suivants :
(a) $\omega_0 = 0.8\omega$ (b) $\omega_0 = 5.3\omega$

3. On remplira le tableau Tab. 13.1 jusqu'à l'harmonique d'ordre 13 et on tracera les spectres d'amplitude.

N.B. : on note dans le tableau $\delta = \frac{F}{k}$ où k est la raideur du ressort de l'oscillateur (cf. Eq. 13.49).

4. Commentaire : comment se comporte l'oscillateur dans le cas (a) ?
 5. Dans le cas (b), quel est l'harmonique majeur ?

Remarque : il est impossible d'obtenir en pratique une force identique à celle de cet exemple. On peut cependant s'en approcher au moyen de machines dites hydropulses, utilisées pour des essais de fatigue.

TABLE 13.1 – Harmoniques à calculer.

n	1	3	5	7	9	11	13
F_n/F	1.2732						
(a) X_n/δ	2.2096						
(b) X_n/δ	1.32						

13.92 Signal radar

Un signal radar $s(t)$ est constitué d'un train d'impulsions rectangulaires qui modulent en amplitude une porteuse $K \cos(2\pi f_p t)$ de fréquence f_p .

L'impulsion rectangulaire de base, centrée, de largeur T , vaut : $x(t) = A \square_T(t)$.

Soit f_r la fréquence de répétition des impulsions qui forment le train infini d'impulsions noté $y(t)$.

1. Calculer la fonction d'autocorrélation $c_x(\tau)$ de $x(t)$ et donner les transformées de Fourier respectives $C_x(\nu)$ et $X(\nu)$.
2. Donner l'expression du train d'impulsions $y(t)$ et de sa TF $Y(\nu)$.
3. Dans le cas d'une seule impulsion modulante $x(t)$, donner l'expression d'un signal radar $s_0(t)$ et de sa TF $S_0(\nu)$.
4. Même question dans le cas du train d'impulsions $y(t)$ qui modulent la porteuse pour former le signal complet $s(t)$. On notera $S(\nu)$ sa transformée.
5. A la réception, on ne dispose du signal radar que sur une durée d'observation limitée D . C'est-à-dire qu'on reçoit le signal $z(t) = s(t) \cdot \square_D(t)$. Calculer d'abord et représenter la fonction spectrale $W(\nu)$ correspondant au signal modulant tronqué : $w(t) = y(t) \cdot \square_D(t)$. En déduire la TF $Z(\nu)$ correspondant au signal radar tronqué $z(t)$.

13.93 Corrélateur analogique

Soit $x(t)$ un signal réel de puissance moyenne finie dont on veut estimer la fonction d'autocorrélation $\gamma_x(\tau)$.

1. Donner le schéma de principe d'un corrélateur analogique.
N.B. : on appellera $y(t)$ le signal en sortie du multiplieur et $z(t)$ le signal après l'intégrateur.
2. L'intégrateur est un filtre RC passe-bas élémentaire. Calculer sa fonction de transfert $H(\nu)$ et sa réponse impulsionnelle $h(t)$.
3. On considère maintenant le cas où : $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$. Calculer alors $\gamma_x(\tau)$.
4. Calculer la tension $z(t)$ en sortie du corrélateur. La comparer à $\gamma_x(\tau)$.
5. A quelle condition (portant sur la fréquence de coupure f_c du filtre intégrateur) la fluctuation de $z(t)$ par rapport à sa moyenne est-elle inférieure à $\epsilon \gamma_x(0)$, où $\epsilon \ll 1$?
A.N. : $f_0 \geq 10Hz$ et $\epsilon = 1\%$
6. On veut déterminer le temps de mesure nécessaire pour obtenir une bonne approximation de $\gamma_x(\tau)$. Le signal $x(t)$ est appliqué pour $t > 0$. La partie oscillante de $z(t)$ est supposée d'amplitude négligeable (par suite du filtrage). Exprimer la réponse $z_1(t)$ du filtre à la partie apériodique $y_1(t)$ de $y(t)$.
7. Déterminer le temps T tel que pour $t \geq T$: $(1 - \epsilon)\gamma_x(\tau) \leq z_1(t) < \gamma_x(\tau)$
8. A.N. : $f_0 = 10Hz$; le retard maximal étant $\tau_M = 1/f_0$, calculer T pour que l'erreur relative soit inférieure à $\epsilon = 1\%$ si $f_c = f_0/50$.

13.94 Synthèse d'un filtre RII

Pour élaborer un filtre numérique, on peut exploiter la théorie et les techniques de synthèse des filtres analogiques. Une méthode couramment utilisée pour passer de la fonction de transfert analogique $H_A(p)$ à la fonction de transfert numérique $H_N(z)$ est la transformation bilinéaire :

$$p = K \frac{z - 1}{z + 1}$$

Cette transformation a notamment pour avantage de conserver les propriétés essentielles du filtre analogique, dont la stabilité.

Par ailleurs, lorsqu'on utilise $H_N(z)$ pour filtrer un signal numérique issu de l'échantillonnage d'un signal analogique avec une fréquence d'échantillonnage F_e , la fonction de transfert équivalente vis-à-vis du signal analogique est : $H(f) = H_N(e^{j\theta})$ où $\theta = 2\pi f/F_e$.

1. Montrer que pour la transformation définie ci-dessus, lorsque $p = j2\pi\nu$ avec ν variant de $-\infty$ à $+\infty$, la trajectoire de z est le cercle unité $z = e^{j\theta}$ dans le plan z . En déduire la relation entre la fréquence numérique f et la fréquence analogique ν . En donner une représentation graphique.
2. On définit le filtre numérique par $H_N(z) = H_A\left(K\frac{z-1}{z+1}\right)$. En déduire l'allure de $|H(f)|$ en fonction de celle de $|H_A(j2\pi\nu)|$.

Application : On veut synthétiser un filtre numérique réjecteur à partir d'un filtre analogique (Fig. 13.26) dont la fonction de transfert de Laplace est :

$$H_A(p) = \frac{1}{2} \frac{(2\pi\nu_0)^2 + p^2}{(2\pi\nu_0)^2 + 2\zeta(2\pi\nu_0)p + p^2} \text{ avec : } 2\pi\nu_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ et : } \zeta = \frac{R}{4} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

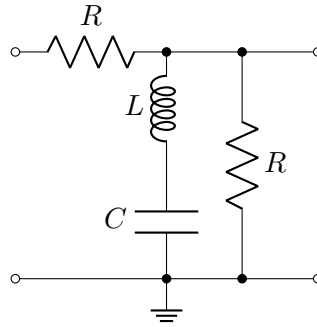


FIGURE 13.26 – Filtre RLC réjecteur.

3. Donner schématiquement la variation de $|H_A(j2\pi\nu)|$.
4. Déterminer la constante K pour avoir $H(f) = 0$ pour $f = \pm F_e/4$. Montrer que : $K = 2\pi\nu_0$.
5. Montrer que $H_N(z)$ correspond à un filtre récursif dont on donnera le diagramme de calcul.
6. Vérifier que ce filtre est réalisable.
7. A quelle condition le filtre numérique est-il stable ?

13.95 Calcul de filtre réjecteur électronique

1. Démontrer l'expression de la fonction de transfert $H_A(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}$ du filtre analogique de la Fig. 13.26.
2. Tracer ses courbes de Bode (gain et phase) et commenter³.

3. Les 2 exercices des sections 13.94 et 13.95 peuvent constituer l'énoncé d'un seul sujet complet.

Chapitre 14

Travaux pratiques

14.1 Prérequis et objectifs

- Prérequis : connaissances mathématiques de base (analyse, algèbre, statistique), et transformées intégrales (TL,TF,TZ)
- Objectif : maîtriser l'usage d'un logiciel de calcul numérique et de visualisation scientifique (typ. Matlab) pour le traitement de signal appliqué à l'électronique et l'automatique
- Organisation : 8 [TP](#) de 1h30 en binôme
- Evaluation : 1 compte-rendu final rédigé par le binôme contenant tous listings, résultats et figures utiles, ainsi que l'**interprétation** des résultats (traitement de texte obligatoire).

14.2 Introduction à Matlab

14.2.1 Principales caractéristiques

Matlab est un environnement logiciel de **calcul et visualisation scientifique** :

- Matlab (pour *Matrix Laboratory*) repose sur un langage **interprété**.
- La programmation est aisée car la syntaxe du langage est proche de l'écriture mathématique.
- La donnée de base est la **matrice** ou tableau (vecteur ou scalaire étant des cas particuliers).
- La dimension des données n'a pas besoin d'être spécifiée (ni leur type).
- L'**interactivité** de Matlab permet de programmer et simuler plus vite qu'en C ou Fortran.

- Matlab est couramment utilisé dans la recherche et l'industrie.
- Les inconvénients éventuels sont la lenteur d'exécution et le coût en mémoire.

Matlab est fourni avec des **Toolboxes** (boîtes à outils) dédiées à des applications spécifiques :

- Ce sont des bibliothèques de fonctions (fichiers **ASCII** d'extension .M)
- **Symbolic Math** : calcul symbolique (intégrale, équation différentielle)
- **Signal Processing** : traitement de signal (filtrage, analyse spectrale)
- **System Identification** et **Control System** : automatique (identification, correcteur)
- **Image Processing** : traitement d'image.

Le système interactif Matlab comporte 5 parties :

- **Environnement** de développement (fenêtres de commandes)
- **Bibliothèque** de fonctions mathématiques (algèbre, trigonométrie, transformées)
- **Langage** (contrôles de flux, fonctions, structures)
- Commandes **graphiques** (visualisation 2D et 3D)
- API de **communication** avec le C et le Fortran.

14.2.2 Environnement de travail

14.2.2.1 Session Matlab

- licence **PC** sous Windows (jetons)
- double-cliquer sur l'icône Matlab pour lancer une session
- fenêtre de **commande** : pour saisir des variables, écrire des instructions, lancer des programmes (après le prompt (»)) de l'interpréteur Matlab), et voir des résultats en mode texte
- fenêtre d'**éditeur** : pour écrire des fichiers .M
- fenêtre graphique (**Figure**) : pour visualiser des courbes
- répertoire de travail par défaut : work (modifiable dans startup.m)

14.2.2.2 Contrôle de session

- CTRL C : interruption de programme
- exit/quit : fin de session
- ↑ : rappel de commande précédente

- **!** : redonner la main au système d'exploitation
- **help** <**nom de fonction**> : aide en ligne (très utile!)
- **who/whos** : liste des variables en mémoire
- **clear** : libération de la mémoire vive (très utile!)
- **close all** : ferme toutes les figures
- **clc** : efface la fenêtre de commande.
- fichier de démarrage (à configurer éventuellement) :
`<Matlab>\toolbox\local\startup.m`

`path(path,'D:\MonRepertoire\MesPgmMatlab')`
`cd D:\MonRepertoire\MesPgmMatlab`

14.2.3 Langage de programmation

14.2.3.1 Principe de la syntaxe

Matlab est un langage d'expression, i.e. interprété (pas de compilation nécessaire). Il interprète et évalue en ligne les instructions tapées au clavier.

Une instruction peut être :

- tapée directement dans la fenêtre de **commande** pour exécution en ligne.
- insérée dans un **programme** exécutable (fichier .M)
- insérée dans une **fonction** externe (fichier .M)

Une instruction est constituée de variables, nombres, opérateurs et fonctions. Elle est de la forme :

```
variable=expression;
```

ou simplement :

```
expression;
```

Séparateurs :

- une instruction se termine par un **point-virgule** (;) sauf si l'on veut voir à l'écran tous les calculs intermédiaires, auquel cas on utilise à la place le simple retour chariot (<RET>) ou la virgule (,).
- **%** : séparateur qui annonce un **commentaire** dans un fichier Matlab.

14.2.3.2 Exemples d'instructions

- formation d'un vecteur-ligne t contenant des instants d'échantillonnage espacés d'une période T_e :

```
t=0:Te:T; %vecteur-temps échantillonné
```

- extraction des n premiers échantillons :

```
t(1:n);
```

- génération d'un vecteur x contenant les échantillons d'une sinusoïde :

```
x=A*sin(2*pi*f*t);
```

A, π, f étant des scalaires, x récupère la dimension de t (aucune déclaration de type ou de dimension n'est nécessaire).

- transposition pour former le vecteur colonne correspondant :

```
y=x';
```

- formation d'une matrice M de taille 3×3 :

```
M=[a11 a12 a13 ; a21 a22 a23 ; a31 a32 a33];
```

- extraction du premier coefficient de la matrice :

```
coeff1=M(1,1);
```

14.2.3.3 Opérateurs et constantes

```
+ - * / ^ ' ,
```

```
.* ./ .^ .' ,
```

```
== ~= > < <= >=
```

```
pi i j Inf NaN
```

14.2.3.4 Contrôle de flux de données

- **for** : répétition d'instructions un certain nombre de fois. Syntaxe :

```
for variable=scalaire1:scalaire2
    instruction;
end
```

- **if** : exécution conditionnelle d'instructions. Syntaxe :

```
if expression1
    instruction1;
elseif expression2
    instruction2;
end
```

où expression1 et 2 utilisent les tests d'égalité, différence ou inégalité.

- **while** : répétition d'instructions un nombre indéfini de fois.
- Autres instructions conditionnelles classiques : **switch**, **continue**, **break**

14.2.3.5 Création d'une fonction externe

L'instruction **function** sert à définir une nouvelle fonction externe qui étend ainsi le vocabulaire de Matlab. Les instructions constituant la fonction sont écrites dans un fichier d'extension **.M** et de **même nom** que la fonction. La première ligne du fichier contient la définition de la syntaxe de la fonction. Par exemple dans un fichier **newfun.m**, la 1ère ligne :

```
function [out1, out2] = newfun(in1)
```

définit une nouvelle fonction appelée **newfun** qui calcule à partir d'une matrice d'entrée **in1**, deux matrices de sortie **out1** et **out2**. L'appel à cette nouvelle fonction dans un autre programme se fait par :

```
[z,y] = newfun(x);
```

14.2.4 Bibliothèque de fonctions

14.2.4.1 Fonctions graphiques

- **axis** : pour spécifier les limites des axes d'une figure.
- **figure** : ouvre une nouvelle fenêtre graphique (Figures No. 2, 3, etc...) qui devient la fenêtre graphique courante. On peut spécifier le numéro de la fenêtre : **figure(1)**.
- **grid** : ajoute un quadrillage en pointillé sur une figure.
- **hold on/off** : maintien ou non du tracé précédent dans la fenêtre graphique (pour superposer des courbes).
- **plot** : tracé de courbes dans la fenêtre de visualisation. Syntaxe :

```
plot(x, y, 'type', x1,y1,'type1',...);
```

où **x** est le vecteur des abscisses (facultatif), **y** le vecteur des ordonnées, **'type'** le type ou la couleur du trait (facultatif). On peut spécifier en option l'échelle des axes, les légendes, la grille de façon très souple.

- **print** : impression de la figure sur l'imprimante :

```
print -ddesket ou -dlaserjet
```

impression de la figure dans le presse-papiers :

```
print -dmeta ou -dbitmap
```

impression de la figure dans un fichier Postscript :

```
print nom_fich -deps
```
- **subplot(m,n,p)** : division d'une figure en $m \times n$ rectangles et tracé dans le p-ième rectangle.
- **title** : ajoute un titre sur une figure.
- **xlabel, ylabel** : ajoute une légende sur l'axe horizontal (resp. vertical) d'une figure.
- **zoom on/off/out** : pour dilater une courbe à l'aide des boutons de la souris.

14.2.4.2 Interaction utilisateur

- **disp** : affichage de texte ou matrices dans la fenêtre de commande. Intérêt : commentaires à l'exécution.
- **echo on/off** : contrôle l'affichage à l'écran des commandes des fichiers d'extension .M lors de leur exécution. Intérêt : pour déboguer ou pour un programme de démonstration.
- **input** : après l'affichage d'un message, attente d'une entrée au clavier avec retour chariot. Syntaxe :

```
x = input('message','s');
```

où x récupère la valeur ou la chaîne de caractères entrée au clavier. On rajoute 's' dans le cas où l'entrée au clavier est une chaîne de caractères (string) et non une valeur numérique.
- **isempty(x)** : retourne 1 si l'élément est vide, 0 sinon. Utile pour spécifier une valeur par défaut lors d'une entrée au clavier avec input.
- **pause** : arrêt temporaire de l'exécution jusqu'à la frappe d'une touche quelconque au clavier. Cela permet de s'arrêter pour voir à l'écran un graphique.

14.2.4.3 Interaction fichiers externes

- Transfert matrice <-> fichier ASCII : **load/save**
- Entrée/sortie fichier : **fopen, fclose, fread, fwrite, fseek, fprintf...**
- Accès image externe : **imread, imwrite...**

14.2.4.4 Manipulation de matrices

- **length(x)** où x est un vecteur : donne la dimension d'un vecteur.
- **[m n]=size(A)** : récupère les dimensions m et n d'une matrice donnée A .
- **min(x)** : recherche du minimum du vecteur x .

14.2.4.5 Fonctions mathématiques

- **abs** : valeur absolue (resp. module) des éléments d'une matrice réelle (resp. complexe).
- **log(x)**, **log10(x)** : logarithme népérien ou à base 10 des éléments de x .
- autres fonctions de base : **sqrt**, **exp** ...

14.2.4.6 Signaux de base

- **randn** : génère un bruit aléatoire normal de moyenne nulle et de variance 1. Syntaxe :

```
randn(size(A))
```

pour avoir un vecteur de nombres aléatoires de même taille que A .
- **y=sin(x)** : fonction sinus (qui opère élément par élément dans le cas d'une matrice) où x est un scalaire, un vecteur ou une matrice. y récupère la même dimension que x .
- **square(t,duty)** : génère un signal carré de rapport cyclique variable (fait partie du toolbox Signal Processing) où t est le vecteur-temps et $duty$ le rapport cyclique exprimé en % de la période où le signal est positif (par défaut : $duty = 50\%$).

14.3 Séance d'initiation

14.3.1 Manipulation de matrices

1. Former une matrice 3×3 et calculer :
 - matrice transposée
 - extraction d'une ligne, d'une colonne
 - sommation d'une ligne, d'une colonne
 - matrice diagonale ; matrices triangulaires supérieure et inférieure
 - matrice inverse (vérifier le résultat)
 - produit de matrice et de tableaux (N.B. : différence entre $*$ et $.*$)
 - déterminant, valeurs propres et vecteurs propres.

2. Résoudre le système suivant par inversion de la matrice :

$$\begin{cases} 2x + 3y + 2z &= 9 \\ x + 2y - 3z &= 14 \\ 3x + 4y + z &= 16 \end{cases} \quad (14.1)$$

Fonctions utiles : **sum, diag, tril, triu, inv, det, eig ...**

Objectifs : savoir générer et manipuler une matrice, rappel sur la transposition et l'inversion.

14.3.2 Manipulation de polynômes

Un polynôme est représenté par un vecteur ligne contenant les coefficients dans l'ordre des puissances décroissantes. Par exemple le polynôme $P(x) = x^4 + 3.5x^3 - 3.9x^2 + 8x - 20$ s'écrit :

`p=[1 3.5 -3.9 8 -20];`

1. calculer les racines du polynôme : $P_1(x) = x^5 - 6x^4 + 12x^3 - 8x^2$.
2. reconstruire un polynôme $P_2(x)$ à partir de ses racines : 0; 0; 1; 1; 1.
3. tracer le polynôme $P_1(x)$ dans l'intervalle $[-1; 3]$.

Fonctions utiles : **roots, poly, plot**

Objectif : savoir représenter un polynôme et calculer ses racines.

14.3.3 Représentation graphique d'un signal temporel

On veut générer un signal sinusoïdal de fréquence $f = 10Hz$, d'amplitude $A = 3$, de durée $T = 2s$ et échantillonné à $Fe = 5kHz$.

1. écrire une fonction **sinus(Fe,T,f,A)** qui retourne deux vecteurs : le signal échantillonné et les instants d'échantillonnage.
2. tracer le signal en fonction du temps
3. ajouter une légende aux axes et un titre
4. imprimer la figure
5. sauvegarder la figure dans un fichier (pour insérer dans un document)
6. sauvegarder les données (pour communiquer avec un programme externe)
7. ajouter au signal une composante continue : $V_0 = 5$
8. tracer l'histogramme ;
9. calculer la moyenne et la variance ; interprétation ?
10. idem en ajoutant un bruit aléatoire.

Fonctions utiles : **sin, rand, randn, var, mean, hist, function, save, print, plot, stairs, stem, bar, subplot, hold, figure**

Objectifs : savoir générer et analyser un signal discret, tracer une courbe, créer une fonction.

14.3.4 Visualisation 3D et affichage d'image

1. Formation d'une matrice faite de zéros ou de uns : construire une matrice de taille 32×32 contenant une zone carrée de "1" entourée de zéros.
2. Représentation des données en 3D : visualiser la matrice en 3D.
3. Affichage d'une image : le répertoire de travail contient une image au format BMP. Programmer la lecture et l'affichage de cette image sous Matlab. Le programme doit permettre à l'utilisateur de saisir au clavier le nom du fichier.

Fonctions utiles : **zeros, ones, mesh, surf, imread, image, colormap, input, isempty**

Objectifs : savoir présenter des données en 3D, savoir afficher une image, gérer l'interaction avec l'utilisateur (entrée au clavier).

14.4 Calcul et affichage du DSF d'une fonction

1. Choisir un des DSF de la liste fournie dans le Tableau 14.1 et écrire un programme avec Matlab ou Scilab qui permet de calculer ce développement jusqu'à un ordre $N = 10$.
2. Afficher graphiquement le signal obtenu (comparer à la Fig. 14.1).
3. Faire varier N et commenter le résultat.

Le Tab. 14.1 donne le DSF de différentes fonctions illustrées sur la Fig. 14.1.

14.5 Equations différentielles

14.5.1 Toolbox Symbolic Math

Cette boîte à outils dédiée au calcul symbolique est basée sur le noyau Maple. Etant donné une fonction $f(x)$ de la variable symbolique x , elle permet entre autres de :

- calculer en fonction de x les dérivée, intégrale, limite, développement en série de Taylor : fonctions **diff, int, limit, taylor**,
- résoudre des équations différentielles ou algébriques : fonctions **solve, dsolve**,
- calculer les transformées usuelles (Laplace, Fourier, Z) : fonctions **laplace, ilaplace, fourier, ifourier, ztrans, iztrans**.

TABLE 14.1 – DSF de quelques fonctions.

Signal / Type	DSF
dent de scie positif	$s(t) = A \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin n\omega t \right]$
triangle impair	$s(t) = \frac{4A}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \sin[(2n+1)\omega t]$
triangle positif pair, $T = 2\pi$	$g(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos[(2n+1)x]$
triangle positif pair, max en 0	$s(t) = \frac{A}{2} + \frac{4A}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos[(2n+1)\omega t]$
double alternance positif pair	$s(t) = \frac{2A}{\pi} \left[1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)} \cos(2n\omega t) \right]$
simple alternance positif	$s(t) = \frac{A}{\pi} \left[1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)} \cos(2n\omega t) \right] + \frac{A}{2} \sin \omega t$
carré impair	$s(t) = \frac{4A}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin[(2n+1)\omega t]$
carré pair positif	$s(t) = \frac{E}{2} + \frac{2E}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cos[(2n+1)\omega t]$
parabole $f(t) = t^2$ pair, période 2	$f(t) = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(\pi n t)$
mi-rampe $f(x) = x$ période 2π	$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos[(2n+1)x]$ $+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx)$
impulsion largeur τ	$s(t) = \frac{A\tau}{T} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A}{n\pi} [\sin n\omega t - \sin n\omega(t - \tau)]$
rectangle pair rapport cyclique α	$a_0 = E(2\alpha - 1), a_n = \frac{4E}{n\pi} \sin(n\alpha\pi), b_n = 0$
fossé asymétrique	$a_0 = -\frac{\pi}{4}, a_{2n} = 0, a_{2n+1} = -\frac{2}{\pi(2n+1)^2},$ $b_{2n} = -\frac{1}{2n}, b_{2n+1} = \frac{3}{2n+1}$
créneau impair	$a_k = 0, b_{2n} = -\frac{2}{n\pi},$ $b_{2n+1} = \frac{4}{(2n+1)\pi} \left[1 + \frac{2}{(2n+1)\pi} (-1)^n \right]$
onduleur délai τ	$v(t) =$ $\frac{4E}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \cos \left[(2n+1)\omega \frac{\tau}{2} \right] \sin \left[(2n+1)\omega \left(t - \frac{\tau}{2} \right) \right]$

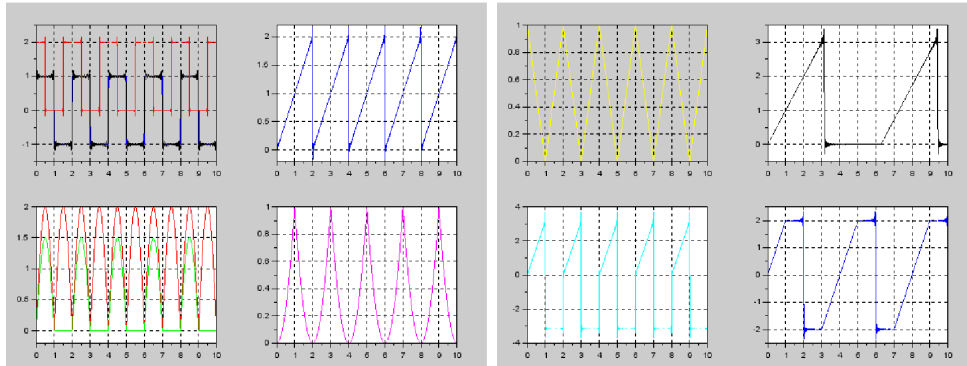


FIGURE 14.1 – Signaux périodiques définis par leur DSF.

14.5.2 ED Linéaire du 1^{er} ordre

1. Résoudre l'équation électrique suivante (pour $t > 0$) :

$$v_e(t) = R.i(t) + L.\frac{di(t)}{dt} \quad (14.2)$$

avec la condition initiale : $i(0) = 0$

2. Application numérique : $R = 2k\Omega$, $L = 100\mu H$. Calculer la constante de temps τ .
3. Tracer $i(t)$ quand $v_e(t)$ est un échelon unitaire, puis une rampe.

14.5.3 ED Linéaire du 2^e ordre

1. Résoudre l'équation différentielle avec conditions initiales nulles :

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2\frac{du}{dt} + 2u(t) = \sin(t) \quad (14.3)$$

2. Tracer la fonction solution $u(t)$ pour $t \geq 0$.

14.5.4 Circuit RLC parallèle

Un circuit RLC parallèle est régi par l'équation suivante ($t > 0$) avec conditions initiales :

$$\frac{d^2e(t)}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{de(t)}{dt} + \frac{1}{LC}e(t) = \frac{1}{C}\frac{di(t)}{dt} \quad (14.4)$$

$$e(0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{de}{dt}(0) = \frac{I_0}{C} \quad (14.5)$$

1. Calculer $e(t)$ pour $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$ où $\omega = 2\pi f$.
2. A.N. : $R = 12k\Omega$, $L = 10mH$, $C = 10nF$, $f = 1kHz$, $I_0 = 3mA$. Tracer $e(t)$ et comparer à $i(t)$.
3. Même question pour $i(t) = I_0 \mathcal{U}(t)$.

Fonctions utiles : **syms**, **dsolve**, **simplify**, **subs**, **fplot**, **diff**

Objectifs : savoir résoudre une équation différentielle linéaire à coefficients constants et tracer la fonction solution. Savoir interpréter les résultats fournis par Matlab.

14.6 Transformée de Laplace

14.6.1 Définition

Soit $f(t)$ une fonction causale de la variable réelle t ($f(t) = 0$ pour $t < 0$). On lui fait correspondre une fonction $F(s)$ de la variable symbolique s :

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (14.6)$$

$F(s)$ est la transformée de Laplace de $f(t)$. On note : $F(s) \subset f(t)$. $f(t)$ est l'original de $F(s)$.

Calcul symbolique : un problème de détermination d'une fonction $f(t)$ peut se traiter par la détermination de $F(s)$, souvent plus simple car on est ramené à un problème algébrique.

14.6.2 Calculs de quelques TL usuelles

Calculer les transformées de Laplace des fonctions suivantes :

1. $f(t) = \exp(at)$
2. $f(t) = \cos wt$ et $f(t) = \sin wt$
3. $f(t) = \cosh(at)$ et $f(t) = \sinh(at)$
4. $f(t) = t^n$ où n est un entier positif
5. $f(t) = t^n \exp(-at)$
6. $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ et $f(t) = \sqrt{t}$

14.6.3 Résolution d'équation différentielle linéaire

Résoudre à l'aide de la TL l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 6 \frac{dy}{dt} + 13y = 4 \exp(-3t) \sin(2t) \quad (14.7)$$

avec pour conditions initiales : $y(0) = 1$, $y'(0) = 5$.

1. Calculer la TL du second membre.
2. Exprimer la TL $Y(s)$ de la solution $y(t)$.
3. En déduire la solution $y(t)$ par transformée inverse.
4. Tracer le graphe de la solution $y(t)$ sur l'intervalle $[0; 5]$.

Help :

laplace, ilaplace, solve, simplify, pretty, subs, syms, fplot

Objectifs : savoir résoudre une équation différentielle linéaire à coefficients constants par transformation de Laplace.

Comprendre que cette méthode algébrique le problème.

14.7 Fonction de transfert

14.7.1 Rappels

Intérêt de la TL pour l'étude des systèmes linéaires stationnaires :

- simple produit algébrique en p au lieu du produit de convolution en t
- $p = j\omega = j2\pi\nu$: diagramme de Bode (gain et phase)
- cf. schéma d'un système linéaire (Fig. 6.5, p. 106).

14.7.2 Amplificateur à résistance compensée

La Fig 14.2 montre trois variantes d'amplificateur à résistance utilisé dans les chaînes d'amplification vidéo analogique.

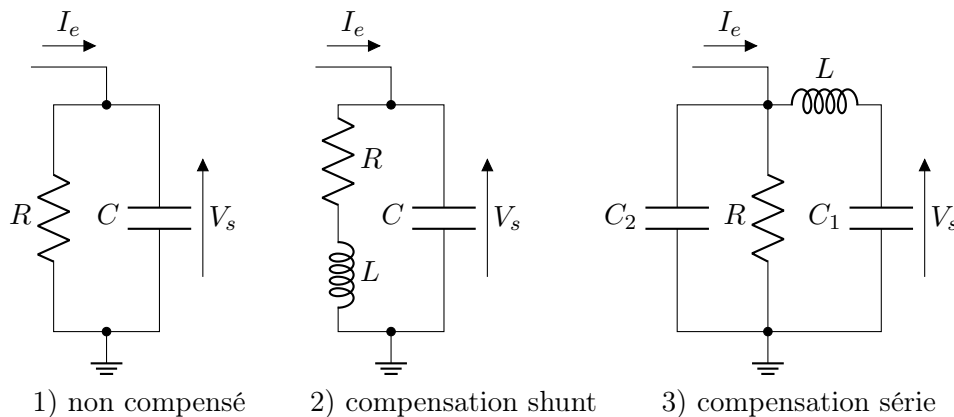


FIGURE 14.2 – Schémas électriques.

On pose : $C = C_1 + C_2$, $\omega_c = 1/RC$, $\omega_0 = 1/\sqrt{LC_1}$, $k = \omega_0/\omega_c$, $m = C_2/C$

1. Montrer que les fonctions de transfert $H(p) = V_s(p)/I_e(p)$ des trois circuits valent :

$$H_1(p) = \frac{R}{RCp + 1} \quad H_2(p) = \frac{Lp + R}{LCp^2 + RCp + 1}$$

$$H_3(p) = \frac{R}{RLC_1C_2p^3 + LC_1p^2 + RCp + 1}$$

2. Tracer les trois fonctions de transfert (gain et phase) pour :
 $R = 1k\Omega$, $C = 1\mu F$, $k = 1.5$, $m = 1/3$ (N.B. : notation : $C_1 = C$ pour le circuit 2).
3. Mesurer les fréquences de coupure, les pentes, les marges de phase.
4. Interpréter les courbes.

Help : **freqs**, **logspace**, **semilogx**, **abs**, **angle**, **unwrap**, **tf**, **bode**, **ltiview**

Objectifs : Comprendre la représentation des courbes de Bode.

Savoir les interpréter et faire les mesures pertinentes.

14.8 Transformée de Fourier

14.8.1 Rappels

— Définition :

$$TF[f(t)] = F(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \exp(-i2\pi\nu t) dt \quad (14.8)$$

— N.B. En prenant $f(t)$ causale et $p = i\omega = i2\pi\nu$, alors on a : TF=TL

— Convolution : $TF[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(\nu).F_2(\nu)$

— Translation : $TF[f(t - t_0)] = \exp(-i2\pi\nu t_0)F(\nu)$

— Modulation : $TF[\exp(i2\pi\nu_0 t)f(t)] = F(\nu - \nu_0)$

— Peigne de Dirac (Formule de Poisson) :

$$TF\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n)\right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(-i2\pi\nu n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\nu - n) \quad (14.9)$$

14.8.2 TF Continue : fonctions usuelles

1. Calculer la TF d'une gaussienne $f(t) = \exp(-t^2)$. Interprétation.
2. Calculer la TF inverse d'un sinus cardinal $F(\nu) = 2\pi \frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu}$. Interprétation.
3. Calculer les TF de $f(t) = \cos 2\pi\nu_0 t$ et $f(t) = \sin 2\pi\nu_0 t$. Interprétation.

Help : **fourier**, **ifourier**

14.8.3 TF Discrète : analyse spectrale

La TFD est fréquemment utilisée pour l'analyse spectrale des signaux numériques.

On fournit trois fonctions : **sinus**, **carre**, **spectre** et un programme : **tfd0**.

Help : **fft**, **abs**, **square**, **log10**

Objectifs : Comprendre la notion de spectre d'un signal. Savoir le calculer et interpréter son tracé graphique.

14.8.3.1 Etude du théorème de Shannon

1. Générer le signal SIN1 ; calculer son spectre échantillonné avec une fenêtre rectangulaire (Porte) de longueur 1024 points ; tracer le spectre en dB sur $[0; F_e/2]$.
2. Idem pour SIN2.
3. Comparer et interpréter par rapport à la théorie.
4. Tracer le spectre échantillonné du signal CAR3. Calculer la décroissance des harmoniques. Interpréter en se reportant à la décomposition en série de Fourier d'un signal carré.
5. Idem pour les signaux CAR1 et CAR2. Interpréter.

14.8.3.2 Influence de la troncature temporelle

Calculer la TFDT (obtenue par FFT avec zero-padding sur 1024 points qui donne une approximation fine du spectre continu) du signal SIN1 pour une fenêtre temporelle rectangulaire de 128 points, puis 64 points.

Etudier le spectre de SOM1. Quels commentaires peut-on faire à propos de la résolution fréquentielle (c'est-à-dire la capacité à distinguer deux signaux de fréquences proches) et de la résolution dynamique (c'est-à-dire la capacité à distinguer deux signaux d'amplitudes très différentes) de la fenêtre rectangulaire ?

14.8.3.3 Etude de l'écrêtage

Le programme **tfd0** permet d'étudier l'influence spectrale de l'écrêtage d'un signal en choisissant un seuil s .

Générer un signal sinusoïdal tel que : $A = 1$, $f = 10Hz$, $T = 1s$, $F_e = 200Hz$, $s = 0.3$. Interpréter le spectre obtenu en comparant au spectre de la sinusoïde pure.

14.8.4 Annexes

14.8.4.1 Signaux tests

TABLE 14.2 – Signaux tests.

Nom	Type de signal	Durée	Fe	Fréq. 1	Amplitude 1	Fréq. 2	Amplitude 2
unité		(s)	(Hz)	(Hz)		(Hz)	
SIN1	sinusoïdal	7	256	100	1	-	-
SIN2	sinusoïdal	7	160	100	1	-	-
CAR1	carré	1	1408	128	1	-	-
CAR2	carré	1	1024	88	1	-	-
CAR3	carré	1	5000	100	1	-	-
SOM1	somme	1	256	100	1	104	1

14.8.4.2 Fonctions internes

- **fft** : calcul de la transformée de Fourier discrète (TFD) avec l'algorithme rapide de FFT (Fast Fourier Transform) si le nombre de points est une puissance de 2. Sinon, le calcul utilise un algorithme plus lent de **DFT** (Discrete Fourier Transform). C'est pourquoi on a intérêt à choisir un nombre N de points qui est une puissance de 2. Syntaxe :

$z = \text{fft}(x, N);$

où x est le vecteur contenant les échantillons du signal, N le nombre de points sur lequel on veut calculer la FFT et z est le vecteur de sortie (*a priori* complexe) récupérant les échantillons de la TFD. Signalons que N n'est pas nécessairement égal au nombre d'échantillons du signal. Si N est supérieur au nombre d'échantillons de signal disponibles, le calcul de la TFD se fait après l'ajout automatique du nombre nécessaire d'échantillons nuls en queue de signal pour compléter les échantillons manquants et obtenir au total N points. Cet artifice de calcul, qui s'appelle *zero-padding*, est intéressant pour avoir un spectre discret (TFD) (évidemment, puisqu'on travaille sur ordinateur!) qui est une approximation très fine du spectre continu (TFDT). Typiquement, on prend $N = 1024$. Cela rajoute sur le spectre échantillonné d'origine des points intermédiaires qui réalisent une interpolation en sinus cardinal (donc exacte) entre les points originels, au lieu de l'interpolation linéaire (donc fausse) faite par l'œil. On améliore

ainsi la visualisation du spectre, mais cela n'ajoute évidemment pas d'information utile d'un point de vue mathématique.

- **abs** : calcul de la valeur absolue (resp. du module) des éléments d'une matrice réelle (resp. complexe). Par exemple, si l'on veut le spectre Sxx du signal x , on prend le module au carré de sa TFD z :

$$Sxx = \text{abs}(z).^2;$$

14.8.4.3 Fonctions externes

- **sinus** : génération d'une sinusoïde. Syntaxe :

$$[x,t] = \text{sinus}(Fe,T,f,A)$$

Cette fonction requiert 4 paramètres d'entrée : la fréquence d'échantillonnage F_e , la durée T (en secondes), la fréquence f et l'amplitude A . Elle donne en sortie 2 vecteurs de même dimension : x contient les échantillons du signal sinusoïdal et t contient les instants d'échantillonnage.

- **carre** : génération d'un signal carré. Syntaxe identique à sinus.
- **spectre** : calcul d'un spectre. Syntaxe :

$$[Sxx,freq]=\text{spectre}(Fe,x,N,dB)$$

Cette fonction requiert 4 paramètres d'entrée : la fréquence d'échantillonnage F_e , le vecteur des échantillons du signal x , le nombre de points de calcul N et une chaîne de caractères dB (n/o) qui spécifie l'échelle désirée (linéaire ou en dB). Elle donne en sortie 2 vecteurs de dimension N : Sxx contient les échantillons du spectre et $freq$ contient les fréquences discrètes correspondantes (de 0 à F_e).

14.9 Transformée en Z

14.9.1 Rappel sommaire

La TZ est l'équivalent de la TL pour des signaux échantillonnés : $x(t) = x(kT_e) = x(k) = x_k$.

Elle s'obtient à partir de la TL par changement de variable complexe : $z = \exp(pT_e)$.

Elle est définie par :

$$F(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(k)z^{-k} \quad (14.10)$$

z^{-1} est l'opérateur retard.

La fonction de transfert d'un filtre numérique est définie par une fraction rationnelle en z^{-1} .

14.9.2 Fonctions usuelles

1. Calculer la TZ de la fonction échantillonnée $f(t) = \exp(at)$ où $t = nT_e$.
2. Calculer la TZ inverse de $F(z) = T_e \frac{z}{(z-1)^2}$.

Help : **ztrans**, **iztrans**

14.9.3 Filtre numérique RII

On s'intéresse à un filtre numérique **RII** dont la fonction de transfert est du type :

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \quad (14.11)$$

On peut le caractériser par ses pôles $p_i = r_i e^{i\theta_i}$ et zéros $z_j = r_j e^{i\theta_j}$, ceci à une constante multiplicative près (facteur de gain qu'on prendra par défaut égal à : $k = 1$).

On supposera que la fréquence d'échantillonnage vaut : $F_e = 10k Hz$.

Pour chacun des systèmes ci-dessous, on tracera :

- la position des pôles et zéros dans le plan complexe (help : **pzmap**, **zgrid**, **conj**)
 - la fonction de transfert (help : **zp2tf**, **freqz**)
 - la réponse impulsionnelle sur 256 points (help : **filter**, **zeros**)
1. Système avec 2 pôles complexes conjugués : $r_i = 0.99$ et $\theta_i = \pm 10^\circ$.
 2. Idem pour $r_i = 0.99$ et $\theta_i = \pm 30^\circ$. Commenter l'influence de θ_i .
 3. Idem pour $r_i = .96$ et $\theta_i = \pm 10^\circ$. Commenter l'influence de r_i .
 4. Idem pour $r_i = 1$ et $\theta_i = \pm 10^\circ$. Commenter la réponse impulsionnelle.
 5. Idem pour $r_i = 1.01$ et $\theta_i = \pm 10^\circ$. Commenter la réponse impulsionnelle.
 6. Ajouter au système 1) une paire de zéros : $r_j = 0.99$ et $\theta_j = \pm 30^\circ$. Commenter l'influence des zéros.
 7. Ecrire l'équation aux différences qui régit le système (expression de l'échantillon de sortie en fonction des échantillons d'entrée et de sortie précédents).

Objectifs : Aborder la caractérisation et la synthèse d'un filtre numérique. Comprendre l'influence des pôles et des zéros de la fonction de transfert en Z .

14.9.4 Annexe théorique

Cas d'une paire de pôles complexes conjugués :

$$H(z) = \frac{A}{z - p_0} + \frac{A^*}{z - p_0^*} = \frac{Az^{-1}}{1 - p_0z^{-1}} + \frac{A^*z^{-1}}{1 - p_0^*z^{-1}} \quad (14.12)$$

$$H(z) = \frac{b_1z^{-1} + b_2z^{-2}}{a_0 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}} \quad (14.13)$$

$$\text{avec : } b_1 = 2\Re[A] \text{ et } b_2 = -2\Re[Ap_0^*]$$

$$H(z) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} Ap_0^n z^{-n} + A^* p_0^{*n} z^{-n} \right] z^{-1} \quad (14.14)$$

$$h(n) = h_0(n-1) \quad (14.15)$$

$$h_0(n) = Ap_0^n + A^* p_0^{*n} = 2\Re[Ap_0^n] \text{ pour : } n \geq 0 \quad (14.16)$$

Si l'on pose : $p_0 = r \exp(j\theta)$ et $A = a \exp(j\phi)$, il vient :

$$h_0(n) = 2a.r^n \cos[n\theta + \phi] \quad (14.17)$$

$$h(n) = 2a.r^{n-1} \cos[(n-1)\theta + \phi] \text{ pour : } n \geq 1 \quad (14.18)$$

correspondant au système analogique :

$$h_0(t) = 2a.r^{t/T_e} \cos\left[\frac{\theta}{T_e}t + \phi\right] \quad (14.19)$$

$$H_0(p) = \frac{1}{1 + 2\frac{\zeta}{\omega_n}p + \frac{1}{\omega_n^2}p^2} \quad (14.20)$$

Et les relations entre paramètres analogiques et numériques :

$$\omega_p = \frac{\theta}{T_e} \quad (14.21)$$

$$\exp(-\zeta\omega_n t) = r^{t/T_e} \Rightarrow -\zeta\omega_n = \frac{\text{Log}(r)}{T_e} \quad (14.22)$$

$$Q = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (14.23)$$

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1-2\zeta^2} \quad (14.24)$$

$$\omega_p = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} \quad (14.25)$$

14.10 Filtrage de signaux

Soient $y(t)$ un signal temporel défini pour $t \in [0, 1]$ et $b(t)$ un bruit aléatoire suivant une loi uniforme de moyenne nulle. Pour $i = 1, \dots, n+1$, on note

$t_i = (i - 1)T_e$ où $T_e = 1/n$. On “observe” le signal bruité z en ces $n + 1$ points équidistants t_i :

$$z(t_i) = y(t_i) + b(t_i), \quad 1 \leq i \leq n + 1$$

et on veut filtrer z pour retrouver le signal y .

14.10.1 Filtrage par moyennage

On note z_m le signal filtré par moyennage. Soit r un entier strictement positif.

- Pour $r + 1 \leq i \leq n + 1 - r$, on obtient z_m à l’instant t_i en prenant la moyenne arithmétique des valeurs de z aux instants $t_{i-r} \cdots t_{i+r}$.
- Pour $1 \leq i \leq r$, on obtient z_m à l’instant t_i en prenant la moyenne arithmétique des valeurs de z aux instants $t_1 \cdots t_{i+r}$.
- Pour $n + 2 - r \leq i \leq n + 1$, on obtient z_m à l’instant t_i en prenant la moyenne arithmétique des valeurs de z aux instants $t_{i-r} \cdots t_{n+1}$.

Ecrire une fonction Matlab qui calcule z_m . La syntaxe d’appel devra être la suivante :

$$z_m = \text{filmoy}(z, r)$$

où z représente le vecteur des $(z(t_i))_{i=1, \dots, n+1}$ et z_m représente le vecteur des $(z_m(t_i))_{i=1, \dots, n+1}$.

N.B. : On pourra utiliser la fonction “**mean**” qui calcule la moyenne arithmétique des composantes d’un vecteur.

14.10.2 Filtrage par troncature du spectre

On suppose que $z(t)$ est périodique de période 1 et que n est pair. Pour obtenir le signal filtré par troncature de spectre, on procède de la manière suivante :

- On calcule la transformée de Fourier discrète de $z(t)$, on obtient le spectre discret en fréquence de z noté $Fz(\nu_i)$ pour des fréquences entières ν_i comprises entre $-n/2$ et $n/2$.

$$\nu_i = -n/2 + (i - 1) \quad i = 1, \dots, n + 1$$

Avec Matlab, pour obtenir le vecteur (à valeur complexe) :

$Fz = (Fz(\nu_i))_{i=1:n+1}$, on utilise les commandes suivantes :

» $Fz = \text{fft}(z)$;

» $Fz = \text{fftshift}(Fz)$;

- On tronque le spectre Fz à une fréquence ν_c fixée ($\nu_c > 0$ est appelée la fréquence de coupure), c'est-à-dire que l'on met à 0 les valeurs de $Fz(\nu_i)$ pour $|\nu_i| > \nu_c$. Le spectre tronqué, noté Fzt , est donné par :

$$\begin{cases} Fzt(\nu_i) = Fz(\nu_i) & -\nu_c \leq \nu_i \leq \nu_c \\ Fzt(\nu_i) = 0 & -n/2 \leq \nu_i < -\nu_c \text{ et } \nu_c < \nu_i \leq n/2 \end{cases}$$

- Puis on calcule la transformée de Fourier inverse du spectre tronqué, on obtient alors le signal filtré z_f . Pour obtenir la transformée de Fourier inverse, on utilise :

» $Fzt = \text{ifftshift}(Fzt)$;

» $z_f = \text{ifft}(Fzt)$;

Ecrire une fonction Matlab qui calcule z_f . La syntaxe d'appel devra être la suivante :

$$z_f = \text{filfft}(z, \nu_c)$$

où z_f représente le vecteur des $(z_f(t_i))_{i=1, \dots, n+1}$.

14.10.3 Simulations

Soit $y(t) = \sin(2\pi t) + \sin(6\pi t) + \sin(16\pi t)$.

1. Pour $n = 1000$, créer le vecteur $y = (y(t_i))_{i=1, \dots, n+1}$.
2. En utilisant la commande **rand**, construire un vecteur b de dimension $n+1$ dont les composantes suivent une loi uniforme. Modifier b pour qu'il soit à moyenne nulle.
 - Créer le vecteur $z = y + 3b$.
 - Tracer sur un même graphique z et y .
 - Calculer z_m pour $r = 2, r = 5, r = 10, r = 20, r = 50$. Tracer sur un même graphique y et z_m pour les différentes valeurs de r .
 - Calculer z_f pour $\nu_c = 5, \nu_c = 10, \nu_c = 15, \nu_c = 20, \nu_c = 100$. Tracer sur un même graphique y et z_f pour les différentes valeurs de ν_c .
3. Mêmes questions pour : $y(t) = t^3 + \sin(16\pi t)$

N.B. : Joindre au compte-rendu le listing des programmes Matlab, ainsi que les graphes demandés.

Les graphes devront être commentés (*i.e.* titre, légende...)

14.11 Consignes de rédaction des comptes-rendus

14.11.1 Choix de sujets

1. DSF : signaux périodiques DDS + triangle + $|\sin \omega t|$ (TP 14.4, p. 247 et TD 13.26, p. 196)

2. TL : calcul symbolique et résolution d'EquaDiff (TP 14.6)
3. ED : circuit RLC// (TP 14.5 et TD 13.35)
4. TL-ED : circuit RLC série (cf. TD 13.48)
5. TL-FdT : Ampli TV (TP 14.7)
6. TFD-FFT : Analyse spectrale (TP 14.8)
7. TZ-FdT : Filtre RII (TP 14.9)
8. TFD-FFT : Filtrage (TP 14.10)
9. TL-Réponse Impulsionnelle et FdT fonctions composées (cf. TD 13.48 et TD 13.49)
10. TF : modulation AM (cf. TD 13.53)
11. TZ : équation de récurrence (cf. TD 13.59)

14.11.2 Délivrables

Fournir :

- **listings** commentés
- **résultats** : figures (domaine temporel, fréquentiel), résultats numériques, solutions symboliques...
- toutes **mesures** pertinentes : *e.g.* constante de temps, fréquence (coupure, fondamental, harmoniques, résonance), période, pente (dB/décade), gain (maxi, statique), bande passante,
- **interprétation** : type de signal ou de filtre (passe-bas, passe-bande), stabilité, oscillation, rapidité...

14.11.3 Critères d'évaluation

1. CR TP / 20 points (à rendre en fin de séance) :
 - /5 Intro/Présentation/Mise en forme propre (page de garde avec noms, date et lieu)
 - /5 Programmation du calcul Matlab : listing (avec commentaires dans le fichier)
 - /5 Résultat : Figure montrant les signaux
 - /5 Interprétation, Commentaire du résultat.
2. RAPIDITE / 20 points :

NoteVitesse=20-rang (1^{er} fini => 19 ; 2^e => 18 ; 3^e => 17 ; NonFini => 10)
3. NOTE GLOBALE= (CR TP + NoteVitesse) / 2

Chapitre 15

Solution des exercices

Préambule

Ce chapitre fournit les corrigés, plus ou moins détaillés, de la centaine de sujets énoncés au chapitre 13. Les illustrations graphiques des résultats qui y figurent proviennent principalement du programme simulateur Matlab dont le listing est fourni en section 16.1.

15.1 Corrigé du 13.1 Trigonométrie

1. L'ensemble des solutions est :

$$\begin{cases} x &= k\pi \\ x &= \frac{\pi}{18} + 2k\frac{\pi}{3} \\ x &= -\frac{\pi}{18} + (2k+1)\frac{\pi}{3} \end{cases}$$

2. La formule de Moivre donne [20] :

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta, \text{ car on a : } (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}.$$

On obtient aisément : $\cos 4\theta = 8 \cos^4 \theta - 8 \cos^2 \theta + 1$

3. Posons : $\arctan x = \theta \Leftrightarrow x = \tan \theta$. On a : $\cos^2 \theta = \frac{1}{1+\tan^2 \theta} = \frac{1}{1+x^2}$.

D'après le résultat précédent (2) : $\cos(4\theta) = \cos(4 \arctan x) = \frac{8}{(1+x^2)^2} - \frac{8}{(1+x^2)} + 1$. En réduisant au même dénominateur, on obtient le résultat.

15.2 Corrigé du 13.2 Complexes

La question 2 modélise le cas d'une impédance électrique d'un circuit série $RLC = ABC$, en fonction de la pulsation $\omega = x$; la question 3 modélise la transformation bilinéaire utilisée en filtrage numérique (cf. § 13.94).

1. $|Z| = \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}$ et $\arg Z = +\frac{\pi}{2} - \arctan(x)$
 $Z = \frac{ix(1-ix)}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2} + i\frac{x}{1+x^2} = \Re(Z) + i\Im(Z)$
 A.N. : pour $x = 1$: $|Z| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\arg(Z) = \frac{\pi}{4}$

2. $Z(x) = A + i\left(Bx - \frac{1}{Cx}\right) \Rightarrow |Z| = \sqrt{A^2 + \left(Bx - \frac{1}{Cx}\right)^2}$

Le minimum est obtenu pour $Bx = \frac{1}{Cx} \Rightarrow x_0 = \frac{1}{\sqrt{BC}}$.

La Fig. 15.1 illustre la variation du module de Z .

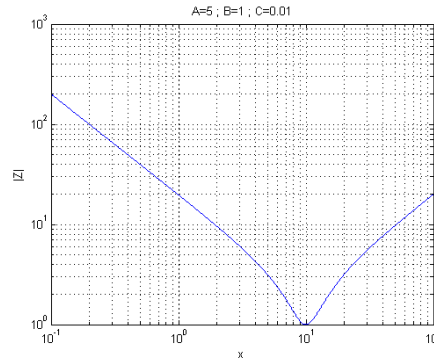


FIGURE 15.1 – Variation du module.

3. Soit $y \in \mathbb{R}$ la partie imaginaire : $\frac{1+z}{1-z} = jy \Rightarrow (1+z) = jy(1-z) \Rightarrow z = -\frac{1-jy}{1+jy}$. Donc ceci implique : $|z| = 1$.

Réciproquement, si z est de module unitaire, il peut s'écrire $z = e^{j\theta}$, où $\theta \in \mathbb{R}$ est son argument. Alors :

$$\frac{1+z}{1-z} = \frac{1+e^{j\theta}}{1-e^{j\theta}}$$

Si l'on multiplie numérateur et dénominateur par $e^{-j\theta/2}$, on obtient :

$$\frac{1+z}{1-z} = \frac{e^{-j\theta/2} + e^{j\theta/2}}{e^{-j\theta/2} - e^{j\theta/2}} = \frac{2 \cos \theta/2}{-2j \sin \theta/2} = j \tan \theta/2$$

qui est bien un imaginaire pur (avec $y = \tan \theta/2$). CQFD

15.3 Corrigé du 13.3 Dérivation

- 1.

$$f'(x) = \frac{7x^4 + 3x^2 - 4x}{2\sqrt{x^3 - 1}}$$

2.

$$g'(x) = \frac{(x-1)^2(5x+1)}{2x^{3/2}} = \frac{5x^3 - 9x^2 + 3x + 1}{2x^{3/2}}$$

3. $f'(x) = \tan^4 x$ 4. $g'(x) = \cos^3 x$

5. La formule est vraie pour $n = 1$ (dérivée première) : pour le démontrer, on utilise la dérivation d'un produit $(fg)' = f'g + g'f$, la dérivation d'une fonction composée $(f \circ g)' = f'(g) \times g'$, et la formule du cosinus d'une somme $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.

Les mêmes arguments permettent de démontrer la récurrence pour $n+1$ partant de la formule en n .

6.

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$$

7. On montre par récurrence que :

$$g^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$$

La formule est vraie pour $n = 1$ car $g'(x) = -\frac{1}{x^2}$. On suppose que l'hypothèse est vérifiée pour n ; on calcule $g^{(n+1)}$, dérivée de $g^{(n)}$, et on vérifie que la formule est vraie en $n+1$.

15.4 Corrigé du 13.4 Intégration

1. $I = \frac{A}{\sqrt{2}}$

2. Posons $z = \cos x \Rightarrow dz = -\sin x dx$. Alors :

$$F(x) = \int -\frac{1}{z^2} dz = \left[\frac{1}{z} \right] = \left[\frac{1}{\cos x} + K \right]$$

3. En utilisant $\cos^2 \theta = \frac{1}{2}[\cos(2\theta) + 1]$, on trouve l'intégrale :

$$\text{Log} \sqrt{x + \sin x} + K$$

4. L'intégration par parties donne : $-x \cos x + \sin x$

5.

$$I_5 = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = \ln |\sin x| + K$$

6. $\begin{cases} u = x \\ v' = \tan^2 x \end{cases} \quad \begin{cases} u' = 1 \\ v = \tan x - x \end{cases}$

$$I_6 = x \tan x + \text{Log} |\cos x| - \frac{1}{2} x^2$$

15.5 Corrigé du 13.5 EDL

- Equation caractéristique : $ar^2 + br + c = 0$ avec $a = 1$, $b = 3$ et $c = 2$.
 discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 8 = 1 \Rightarrow$
 racines : $r_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{\Delta}}{2} = (-1; -2)$
 solution générale sans 2nd membre : $y_{g_0} = K_1 e^{-x} + K_2 e^{-2x}$
 solution particulière avec 2nd membre : $y_p = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ avec
 $(A = B = 0) \Rightarrow y_p = \frac{5}{2}x - \frac{13}{4}$.
 Finalement, la solution générale est : $y(x) = y_{g_0} + y_p$.

- $y' = \alpha x^{\alpha-1}$ et $y'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$
 On substitue, en simplifiant par x^α : $\alpha(\alpha-1) - \frac{1}{2}\alpha - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_2 = -0.5 \end{cases}$
 Donc 2 solutions : $y = x^2$ et $y = 1/\sqrt{x}$.
 Pour l'autre équation différentielle avec le 2nd membre x^2 , on obtient :
 $x^\alpha(\alpha-1)^2 = x^2$

La seule solution est alors : $y = x^2$ (obtenue pour $\alpha = 2$).

- Equation sans 2nd membre : $y' + 2y = 0$
 équation caractéristique : $r + 2 = 0 \Rightarrow r = -2 \Rightarrow y_{g_0} = K e^{rx} = K e^{-2x}$
 solution particulière avec 2nd membre : $y_p = A \sin(3x + B)$ donc $y'_p = 3A \cos(3x + B)$
 $\Rightarrow \forall x, 3A \cos(3x + B) + 2A \sin(3x + B) = 5 \sin 3x$
 pour $x = 0$: on trouve $B = \arctan(-\frac{3}{2})$; pour $x = -B/3$: on trouve
 $A = -\frac{5}{3} \sin B$
 solution générale avec 2nd membre : $y = y_{g_0} + y_p$
 C.I : $y(0) = 1 \Rightarrow K e^{-0} + A \sin B = 1 \Rightarrow K = 1 - A \sin B = 1 + \frac{3}{5}A^2$

15.6 Corrigé du 13.6 Fraction rationnelle

- Pôles simple et doubles $\in \mathbb{R}$:

$$F_1(x) = \frac{3/2}{x-3} + \frac{19/2}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{-11}{x-2} + \frac{5}{(x-2)^2}$$

- Déjà tout décomposé (car $\Delta < 0$) :

$$F_2(x) = \frac{1}{4x^2 + 4x + 5}$$

3. Pôles doubles $\in \mathbb{C}$:

$$F_3(x) - \frac{2/3}{x-3} = \frac{-\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 + x + 1}{(x^2 - 3x + 3)^2} = \frac{-2x/3}{x^2 - 3x + 3} + \frac{3x + 1}{(x^2 - 3x + 3)^2}$$

4. Avec partie entière :

$$F_4(x) = (x + 4) + \frac{12x - 17}{(x - 2)^2} = (x + 4) + \frac{12}{x - 2} + \frac{7}{(x - 2)^2}$$

5. 3 racines simples :

$$F_5(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$$

avec : $A = -1$, $B = 3$ et $C = 4$.

6. Racines simple et doubles :

$$F_6(x) = \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{(x-2)^2} + \frac{B}{x+5}$$

avec : $A_1 = 5/7$, $A_2 = 3$ et $B = 9/7$.

7. Une racine évidente ($= -1$) :

$$F_7(x) = \frac{x}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{A_1}{x-i} + \frac{A_2}{x+i}$$

avec : $A_1 = \frac{1-i}{4}$, $A_2 = \bar{A}_1 = \frac{1+i}{4}$, $A = -1/2$ et $B = C = 1/2$.

15.7 Corrigé du 13.7 Intégrales

1. $I_1 = \int F(x)dx$ où $F(x) = \frac{-1/2}{x+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x+1}{x^2+1}$. D'où :

$$I_1 = \frac{1}{4} \ln \frac{x^2+1}{(x+1)^2} + \frac{1}{2} \arctan x + K$$

2. $I_2 = \arctan(\infty) - \arctan(0) = \frac{\pi}{2}$ et $I_3 = \arcsin(1) - \arcsin(0) = \frac{\pi}{2} - 0$

3.

$$I_n = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx = x^n e^x - n I_{n-1}$$

4. $I_5 = \frac{3}{4}x^{4/3} + \frac{3}{2}x^{2/3}$ et $I_6 = x - 3x^{2/3} + 3x^{1/3}$

5. Posons $z = \text{Log}x$, alors : $dz = \frac{1}{x}dx$, donc :

$$I_7 = \int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \text{Arcsin}z = \text{Arcsin}(\text{Log}x)$$

6. I_8 s'obtient par une double intégration par parties :

$$1^\circ) \begin{cases} u = x^2 \\ dv = e^{2x} dx \end{cases} \quad \begin{cases} u' = 2x \\ v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases} \quad 2^\circ) \begin{cases} u = x \\ dv = e^{2x} dx \end{cases} \quad \begin{cases} u' = 1 \\ v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$$

$$I_8 = \frac{1}{4}e^{2x}(2x^2 - 2x + 1)$$

7. On peut calculer I_9 selon deux méthodes :

$$1^\circ) \text{ par intégration par parties : } \begin{cases} u' = \frac{1}{\sqrt{x}} \\ u = 2\sqrt{x} \end{cases} \quad \begin{cases} v = \sqrt{a-x} \\ v' = \frac{-1}{2\sqrt{a-x}} \end{cases}$$

2°) en posant $\frac{x}{a} = \sin^2 t$ (possible car $0 < x < a$). Alors :

$$t = \text{Arcsin} \sqrt{\frac{x}{a}} \Rightarrow \sqrt{\frac{x}{a}} = \sin t \Rightarrow \sqrt{1 - \frac{x}{a}} = \cos t \quad (15.1)$$

$$dx = 2a \sin t \cos t dt \quad (15.2)$$

En utilisant $\cos^2 \theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$, on obtient :

$$I_9 = a \text{Arcsin} \sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{x(a-x)} + \text{cte}$$

8. N.B. : $\int u dx = xu - \int x du$; ici : $u = (\text{Log} x)^n$ donc $\frac{du}{dx} = n(\text{Log} x)^{n-1} \times \frac{1}{x}$

$$\Rightarrow I_n = x(\text{Log} x)^n - n \int \frac{x}{x} (\text{Log} x)^{n-1} dx = \boxed{x(\text{Log} x)^n - nI_{n-1}}$$

et pour $n = 1$: $I_1 = \int \text{Log} x dx = x \text{Log} x - x$

\Rightarrow

$$I_n = x [(\text{Log} x)^n - n(\text{Log} x)^{n-1} + n(n-1)(\text{Log} x)^{n-2} + \dots + (-1)^n n!]$$

15.8 Corrigé du 13.8 Riemann

1. La suite (u_n) est croissante car $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^\alpha} > 0$

2. Si $\alpha > 1$: on peut majorer la somme par une intégrale convergente. En effet, la Fig. 15.2 montre que : $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} = 1 + S$, où S est la somme des surfaces des rectangles hachurés sous la courbe.

Donc $u_n \leq 1 + A_n$, où A_n est l'aire sous l'intégrale : $A_n = \int_1^n \frac{dt}{t^\alpha}$. D'où :

$$u_n \leq 1 + \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_1^n \leq 1 + \frac{1}{\alpha-1} \left[1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}} \right] < 1 + \frac{1}{\alpha-1}$$

La suite (u_n) est majorée et croissante, donc elle converge.

3. Si $0 < \alpha < 1$: on minore la somme par une intégrale divergente. Pour cela, on peut raisonner graphiquement en décalant tous les rectangles d'une unité vers la droite. On a alors : $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} = R \geq A_{n+1}$, où R est la somme des rectangles décalés (en pointillés), et où A_{n+1} est l'aire sous l'intégrale jusqu'à $n+1$. Donc :

$$u_n \geq \int_1^{n+1} \frac{dt}{t^\alpha} = \underbrace{\frac{1}{1-\alpha} [(n+1)^{1-\alpha} - 1]}_{\rightarrow +\infty \text{ quand } n \rightarrow \infty}$$

Donc u_n ne peut être bornée, donc diverge.

4. Si $\alpha = 1$: d'après 3, $u_n \geq \int_1^{n+1} \frac{dt}{t} = \ln(n+1)$. Or $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n+1) = +\infty$, donc u_n ne peut être bornée. CQFD

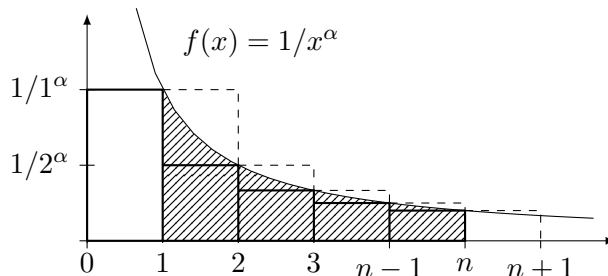


FIGURE 15.2 – Encadrement d'une intégrale par des rectangles.

15.9 Corrigé du 13.9 Suites

- $u_n = \frac{1}{n^{1/2}}$; $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ donc la suite converge
 $f(x) = \frac{1}{x^{1/2}}$; $\alpha = 1/2 < 1$ donc la somme partielle (*i.e.* série) diverge.
on peut aussi dire que $u_n > \frac{1}{n}$ or la série $\frac{1}{n}$ est divergente donc u_n aussi
- suite convergente car $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3+n^2} = 0$
la somme partielle converge car $\frac{1}{3+n^2} < \frac{1}{n^2}$ qui est le terme d'une série de Riemann convergente (car $\alpha > 1$)
- suite convergente pour $p > 0$;
par contre $(\text{Log } n)^p < n \Rightarrow \frac{1}{(\text{Log } n)^p} > \frac{1}{n}$ qui est le terme d'une série divergente
- suite convergente, mais somme partielle (*i.e.* série) divergente car :
 $\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} > \frac{1}{n+1}$ qui est le terme d'une série divergente

5. suite convergente, et somme partielle convergente car :

$$\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}} > \frac{1}{n^{3/2}}, \text{ terme d'une série convergente } (\alpha > 1)$$

6. $\text{Log} n < n$ donc $u_n \approx \text{Log} n \left(\frac{1}{n}\right) \left(\frac{1}{n^2}\right) < \frac{1}{n^2}$, série qui converge.

15.10 Corrigé du 13.10 Suite géométrique

1. La relation de récurrence entre les termes S_n peut s'écrire, $\forall n > 2$:

$$u_n = S_n - S_{n-1} = \frac{S_{n-1} + S_{n-2}}{2} - S_{n-1} = \frac{1}{2}[S_{n-2} - S_{n-1}] = -\frac{1}{2}u_{n-1}$$

Les u_n forment donc une progression géométrique convergente, de raison $r = -1/2$ et de terme initial : $u_2 = S_2 - S_1 = b - a$.

$$\begin{cases} u_n = -\frac{1}{2}u_{n-1} \\ u_1 = a \\ u_2 = b - a \end{cases}$$

2. On en déduit : $S_n = u_n + S_{n-1} = u_n + u_{n-1} + S_{n-2} = \dots = u_n + u_{n-1} + \dots + u_2 + u_1 = u_1 + \sum_{k=2}^n u_k$

$$S_n = u_1 + u_2 \left[1 + \left(-\frac{1}{2}\right) + \dots + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} \right]$$

$$S_n = a + (b-a) \cdot \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = a + \frac{2}{3}(b-a) \left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right]$$

Lorsque $n \rightarrow \infty$, la limite est : $S = a + \frac{2}{3}(b-a) \Rightarrow S = \frac{a+2b}{3}$

15.11 Corrigé du 13.11 Suite arithmétique

1. $\alpha = e^{ia}$ et $z = e^{ib}$, donc $z^k = e^{ikb} = \cos kb + i \sin kb$ et $\alpha z^k = e^{i(a+kb)}$

2. $u + iv = \alpha + \alpha z + \alpha z^2 + \dots + \alpha z^{n-1} = \alpha[1 + z + \dots + z^{n-1}] = \alpha \frac{1-z^n}{1-z}$

3. Or :

$$\frac{1-z^n}{1-z} = \frac{e^{inb} - 1}{e^{ib} - 1} = \frac{e^{i\frac{nb}{2}} \left[e^{i\frac{nb}{2}} - e^{-i\frac{nb}{2}} \right]}{e^{i\frac{b}{2}} \left[e^{i\frac{b}{2}} - e^{-i\frac{b}{2}} \right]} = e^{i\frac{(n-1)b}{2}} \cdot \left[\frac{\sin \frac{nb}{2}}{\sin \frac{b}{2}} \right]$$

Donc :

$$u + iv = e^{i\left[a + \frac{(n-1)b}{2}\right]} \left[\frac{\sin \frac{nb}{2}}{\sin \frac{b}{2}} \right]$$

D'où :

$$u = \frac{\sin \frac{nb}{2}}{\sin \frac{b}{2}} \cos \left[a + \frac{(n-1)b}{2} \right] \text{ et } v = \frac{\sin \frac{nb}{2}}{\sin \frac{b}{2}} \sin \left[a + \frac{(n-1)b}{2} \right]$$

$$4. \text{ Application 1 : } \begin{cases} a = 1^\circ \\ b = 2^\circ \\ n = 50 \end{cases}$$

$$\Rightarrow S = v = \frac{\sin 50^\circ}{\sin 1^\circ} [\sin (1 + 49)] = \frac{\sin^2 50^\circ}{\sin 1^\circ}$$

$$5. \text{ Application 2 : } \begin{cases} a = 2\pi/7 \\ b = 2\pi/7 \\ n = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow u = \frac{\sin 3\pi/7}{\sin \pi/7} \cos 4\pi/7 = \frac{\frac{1}{2} [\sin \pi + \sin(-\pi/7)]}{\sin \pi/7} = -\frac{1}{2}$$

15.12 Corrigé du 13.12 Grecs

1. Zénon d'Elée, philosophe présocratique disciple de Parménide, défendait le principe de l'Etre immobile, par opposition au principe du Devenir mouvant soutenu par Héraclite. Pour étayer sa thèse, Zénon prétend démontrer mathématiquement l'impossibilité pour une flèche d'atteindre sa cible (donc prouver l'immobilité). Son raisonnement (imparable à l'époque) est le suivant.

Soit D la distance entre l'arc et la cible. Il faut un certain temps t_1 pour que la flèche parcoure la moitié de cette distance $d_1 = D/2$. Il lui reste alors à parcourir une distance $D/2$. Pour parcourir la moitié de cette distance restante (soit $d_2 = D/4$), il lui faut un temps additionnel t_2 . Et ainsi de suite à l'infini \dots Donc la flèche n'atteint jamais sa cible, car il faut une somme infinie de temps élémentaires t_i pour parcourir les distances infinitésimales d_i . Ceci prouve l'immobilité (impossibilité du mouvement).

La question mathématique concerne donc le comportement de la somme partielle : $D \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots \right)$

On sait aujourd'hui qu'il s'agit d'une série géométrique $u_n = a \cdot r^n$, de raison $r = 1/2$ et de premier terme $u_0 = a = D/2$. Elle est convergente, et la somme infinie vaut :

$$S = \frac{a}{1-r} = D$$

Donc soyons rassurés : la flèche peut atteindre la cible¹.

1. Pas d'impossibilité théorique, cela dépend uniquement de la pratique de l'archer !

2. Les Grecs et les Egyptiens ont construit obélisques et pyramides. Mais comment est-ce théoriquement possible ? On s'intéresse d'abord au cas 1D : l'obélisque est une structure verticale à une dimension. Si, pour la réaliser, on empile des barres de longueur respective : 1 mètre , 1/2 mètre , 1/3 mètre, 1/4 mètre etc. Quelle sera la hauteur H dans le cas-limite où l'on itère l'empilement à l'infini ?

Riemann nous fournit la réponse : il s'agit d'une série de Riemann d'exposant $\alpha = 1$. Donc on sait que cette série diverge (la hauteur tendra vers l'infini).

3. En revanche, si l'on passe au cas 2D (construction d'une surface plane en forme triangulaire), on aura affaire à une série de Riemann d'exposant $\alpha = 2$. On sait que cette série converge.
4. De même, si l'on passe au cas 3D (construction d'une pyramide), on a affaire à une série de Riemann d'exposant $\alpha = 3$, qui converge aussi.

15.13 Corrigé du 13.13 Suite homographique

1. voir Fig. 15.3

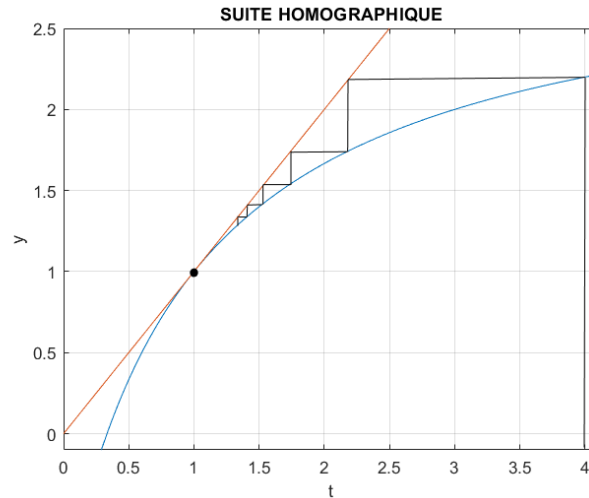


FIGURE 15.3 – Fonction y et identité, avec diagramme itératif.

2. voir Tab. 15.1
3. Il semble que les termes diminuent progressivement et s'approchent d'une valeur voisine de 1. Le graphique itératif en escalier suggère que la suite

TABLE 15.1 – Premiers termes de la suite récurrente.

$u_0 = 4$	$u_5 = 1.353$	$u_{10} = 1.188$	$u_{15} = 1.128$
$u_1 = 2.2$	$u_6 = 1.3$	$u_{11} = 1.172$	$u_{16} = 1.12$
$u_2 = 1.75$	$u_7 = 1.261$	$u_{12} = 1.158$	$u_{17} = 1.114$
$u_3 = 1.546$	$u_8 = 1.231$	$u_{13} = 1.147$	$u_{18} = 1.108$
$u_4 = 1.429$	$u_9 = 1.207$	$u_{14} = 1.137$	$u_{19} = 1.102$

u est majorée par son 1^{er} terme $u_0 = 4$, minorée par 1, et strictement décroissante.

4. L'étude de la fonction $f(t)$ montre qu'elle est continue et dérivable sur l'intervalle $I =]-1; +\infty[$. Sa dérivée vaut : $f'(t) = \frac{4}{(t+1)^2}$. Elle est strictement positive, donc f est strictement croissante sur l'intervalle I .

Faisons donc la démonstration par récurrence de la propriété P_n qui s'énonce :

$$P_n : 1 < u_{n+1} < u_n \leq 4$$

P_0 est vraie car on a bien : $1 < u_1 = 2.2 < u_0 = 4 \leq 4$.

Supposons P_n vraie et démontrons alors que P_{n+1} est vraie aussi :

$$P_n \text{ étant vraie et } f \text{ étant croissante} \Rightarrow f(1) < f(u_{n+1}) < f(u_n) \leq f(4) \Rightarrow 1 < u_{n+2} < u_{n+1} \leq 2.2 \leq 4 \Rightarrow P_{n+1} \text{ est vrai. CQFD.}$$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}, 1 < u_{n+1} < u_n \leq 4$.

La suite u est donc bornée (majorée par 4, minorée par 1) et monotone (décroissante).

5. D'après le théorème 1.3.1, on en déduit que la suite converge.
 6. D'après le théorème de la section 1.5.1, la limite ℓ est l'unique solution de l'équation $f(t) = t$.

$$\text{Or } t = \frac{3t-1}{t+1} \Leftrightarrow t(t+1) = 3t-1 \Leftrightarrow (t-1)^2 = 0 \Leftrightarrow t = 1.$$

$$\text{Conclusion : } \boxed{\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1}$$

7. La formule est vraie pour $n = 0$. Si on la suppose vraie pour u_n , on calcule facilement $u_{n+1} = f(u_n) = 3 - \frac{4}{u_n+1} = \dots = \frac{3n+11}{3n+5} = \frac{8+3(n+1)}{2+3(n+1)}$ CQFD

15.14 Corrigé du 13.14 Fibonacci

1. La Fig. 15.4 montre la croissance exponentielle typique d'une suite de Fibonacci.
2. Les 20 premiers termes sont donnés dans le Tab. 15.2.
3. C'est une suite divergente, à croissance rapide.

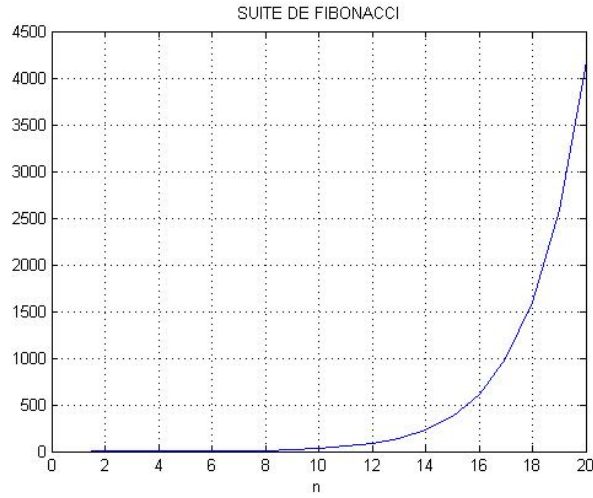


FIGURE 15.4 – Croissance d’une suite de Fibonacci.

TABLE 15.2 – Vingt premiers termes d’une suite de Fibonacci.

$a_0 = 0$	$a_5 = 5$	$a_{10} = 55$	$a_{15} = 610$
$a_1 = 1$	$a_6 = 8$	$a_{11} = 89$	$a_{16} = 987$
$a_2 = 1$	$a_7 = 13$	$a_{12} = 144$	$a_{17} = 1597$
$a_3 = 2$	$a_8 = 21$	$a_{13} = 233$	$a_{18} = 2584$
$a_4 = 3$	$a_9 = 34$	$a_{14} = 377$	$a_{19} = 4181$

15.15 Corrigé du 13.15 Convergence

Cet exercice est extrait de [12].

1. La suite (u_n) est la restriction à \mathbb{N} de la fonction f définie dans \mathbb{R} par :

$$f(x) = \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^{x \ln(1 + \frac{a}{x})}.$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = e^a$. Donc $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e^a}$.

2. On a, d’après l’inégalité fondamentale (Eq.(5.1), p.58) :

$$\forall n \geq 1, |u_n| \leq \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n}. \text{ Or : } \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n}, \text{ donc : } \forall n \geq 1, |u_n| \leq \frac{4}{n}.$$

On en déduit que la suite u converge, en valeur absolue, vers 0.

Comme tous ses termes sont négatifs à partir du rang 4, on peut conclure

que : $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0^-}$

3. Le même raisonnement s'applique pour v quant à sa convergence vers 0. Comme tous les termes de cette suite sont positifs à partir du rang 4, on peut conclure que : $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0^+}$
4. L'inégalité s'applique aussi pour la suite w qui converge donc vers 0. Comme cette suite est alternée à partir du rang 4, on en conclut qu'elle converge vers 0, mais sans garder un signe constant :
 si n est pair et supérieur à 3 : $w_n < 0$.
 si n est impair : $w_n > 0$.

15.16 Corrigé du 13.16 Suite récurrente

1. $u_0 = 2 \Rightarrow u_1 = \sqrt{3} \approx 1.732$. La suite est évidemment minorée par 0, car $\sqrt{1+u_n} \geq 0$.
 On prouve la décroissance en montrant que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n < 0$:

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{1+u_n} - \sqrt{1+u_{n-1}} = \frac{u_n - u_{n-1}}{\sqrt{1+u_n} + \sqrt{1+u_{n-1}}}$$

Donc $u_{n+1} - u_n$ est du même signe que $u_n - u_{n-1}$. Or $u_1 - u_0 = \sqrt{2} - 2 < 0$. CQFD.

La suite étant décroissante et minorée, elle converge.

2. $u_0 = 0 \Rightarrow u_1 = 1$, donc $u_1 - u_0 > 0$. Comme précédemment, $u_{n+1} - u_n$ est de même signe que $u_n - u_{n-1}$, et que $u_1 - u_0$. On déduit que $u_{n+1} - u_n > 0$ donc que la suite est croissante.

Montrons par récurrence que la suite est majorée par 2 : c'est-à-dire que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 2$. La propriété est vraie pour $n = 0$ car $u_0 = 0 \leq 2$. Supposons qu'elle est vraie pour n ; montrons qu'elle est alors vraie pour $n+1$: $u_n \leq 2 \Rightarrow u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} \leq \sqrt{3} \leq 2$. CQFD.

La suite étant croissante et majorée, elle converge aussi.

3. A partir du Tab. 15.3, on conjecture que la limite est $\approx 1.618\,033\,99$ à 10^{-8} près.
4. Considérant la continuité de la fonction $f(x) = \sqrt{1+x}$, la limite de la suite

$$\text{est l'unique solution de l'équation : } f(x) = x \Rightarrow \boxed{l = \frac{1+\sqrt{5}}{2}}.$$

15.17 Corrigé du 13.17 Assassin

1. On utilise le raisonnement par récurrence. Supposons qu'il n'y a qu'une femme infidèle ($n = 1$). Tous les hommes la connaissent, sauf l'unique mari

TABLE 15.3 – Suite de valeurs selon 2 termes initiaux.

n	u_n	
0	0	2
1	1	1.732 050 81
2	1.414 213 56	1.652 891 65
...
10	1.618 016 54	1.618 036 87
...
17	1.618 033 98	1.618 033 99
18	1.618 033 99	1.618 033 99

trompé. Après l'annonce du 1^{er} soir, le mari cocu en déduit que la femme infidèle est la sienne et il la tue. Ainsi, le 2^e soir, le héraut peut annoncer qu'il n'y a plus de femme infidèle. Donc le nombre de femmes infidèles ($n = 1$) est inférieur d'une unité au nombre de soirs d'annonce ($s = 2$).

- Supposons à présent qu'il y a 2 femmes infidèles ($n = 2$). Tous les maris les connaissent, sauf les 2 cocus qui n'en connaissent qu'une seule (celle de l'autre cocu). En entendant l'annonce du 1^{er} soir, chacun des 2 maris trompés doit penser : l'unique mari trompé (l'autre) qui ne connaît qu'une infidèle, tuera sa femme avant le 2^e soir. Mais quand l'annonce se répète le 2^e soir, chacun des 2 cocus comprend que sa femme est aussi infidèle, et il la tue avant le 3^e soir ($s = 3$), où le héraut pourra annoncer qu'il n'y a plus de femme infidèle dans la ville.
- Conclusion : si le héraut annonce le 83^e soir ($s = 83$) qu'il n'y a plus de femme infidèle à Bagdad, cela signifie que la veille, 82 maris trompés ont tué en même temps leur malheureuse épouse en fonction d'un raisonnement implacablement logique. Donc $\boxed{n = 82}$.

15.18 Corrigé du 13.18 Convergence séries

On indique par un code le critère de convergence utilisé : C=Cauchy ; A=Alembert ; R=Riemann ; N=Nécessaire (condition) ; ainsi que la conclusion obtenue sur la série : CV=convergente ; DV=divergente.

- C :

$$\sqrt[n]{|u_n|} = \left(\frac{n^2 - 5n + 1}{n^2 - 4n + 2} \right)^n = e^{n \operatorname{Log} \left(\frac{n^2 - 5n + 1}{n^2 - 4n + 2} \right)} = e^{n \operatorname{Log} \left(\frac{n^2 - 4n + 2 - n + 1}{n^2 - 4n + 2} \right)}$$

$$\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} e^{n \operatorname{Log} \left(1 - \frac{1}{n} \right)} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} e^{-1}$$

Donc $\lim_{\infty} \sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{e} < 1 \Rightarrow$ série CV

2. A :

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{1 + (n+1)^2}{(n+1)(1+n^2)} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n} \underset{n \rightarrow \infty}{\longrightarrow} 0$$

Donc $\lim_{\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = 0 < 1 \Rightarrow$ série CV

3. \bar{A} :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{a} \underset{n \rightarrow \infty}{\longrightarrow} \infty \Rightarrow \text{série DV}$$

4. A :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = e^{n \operatorname{Log} \frac{n}{n+1}} = e^{-n \operatorname{Log} \left(1 + \frac{1}{n} \right)} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} e^{-1}$$

Donc $\lim_{\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < 1 \Rightarrow$ série CV

5. A :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{n} \frac{n+2^n}{n+1+2^{n+1}} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n} \underset{n \rightarrow \infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$$

Donc $\lim_{\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < 1 \Rightarrow$ série CV

6. R : $n^2 u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\longrightarrow} 1 \Rightarrow$ série CV (cf. Riemann pour exposant $\alpha = 2 > 1$)

7. \bar{N} : $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\longrightarrow} 1 \neq 0 \Rightarrow$ série DV

8. \bar{N} :

$$\left(n \sin \frac{1}{n} \right)^{n^2} \sim \left[n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} \right) \right]^{n^2} \sim e^{n^2 \operatorname{Log} n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} \right)} \sim e^{n^2 \left(-\frac{1}{6n^2} \right)} \sim e^{-\frac{1}{6}}$$

Or $e^{-\frac{1}{6}} \neq 0 \Rightarrow$ série DV

9. \bar{R} :

$$\begin{aligned} -\operatorname{Log} \sqrt{n} - \operatorname{Log} \sin \frac{1}{\sqrt{n}} &= -\operatorname{Log} \left[n^{1/2} \sin \frac{1}{n^{1/2}} \right] \\ &\sim -\operatorname{Log} \left[n^{1/2} \left(\frac{1}{n^{1/2}} - \frac{1}{6n^{3/2}} \right) \right] \sim -\operatorname{Log} \left[1 - \frac{1}{6n} \right] \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{6n} \end{aligned}$$

Donc $nu_n \underset{n \rightarrow \infty}{\longrightarrow} \frac{1}{6} \Rightarrow$ série DV (cf. Riemann : règle $n^\alpha u_n$ CV ssi $\alpha > 1$)

10. \bar{C} :

$$nu_n = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{n^{1/n}} = v_n \quad \text{Avec :} \quad \sqrt[n]{v_n} = \frac{1}{n^{1/n^2}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{n^2} \operatorname{Log} n}}$$

Mais $\frac{1}{n^2} \operatorname{Log} n \longrightarrow 0$ donc $\sqrt[n]{v_n} \longrightarrow 1$: cas douteux, donc on emploie un autre critère :

\bar{R} : on a $nu_n \underset{n \rightarrow \infty}{\longrightarrow} 1 \Rightarrow$ série DV (cf. Riemann pour $\alpha = 1$)

11. \overline{R} :

$$nu_n = n \operatorname{Arcsin} \frac{2n}{4n^2 + 1} \sim n \operatorname{Arcsin} \frac{1}{2n} \sim \frac{1}{2}$$

$nu_n \rightarrow \frac{1}{2} \Rightarrow$ série DV (cf. Riemann pour $\alpha = 1$)

15.19 Corrigé du 13.19 Série alternée

1. $|u_n| = \tan \frac{1}{n}$ donc $\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = 0}$. On montre que la suite $|u_n|$ est décroissante en étudiant la fonction $f(x) = \tan \frac{1}{x}$. Calculons sa dérivée : $f'(x) = -\frac{1}{x^2} [1 + \tan^2(\frac{1}{x})] < 0, \forall x \in \mathbb{R}$, donc f est décroissante. Donc $\boxed{\text{la suite } (|u_n|)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est décroissante}}$.

D'après le théorème sur les séries alternées, la série de terme général $u_n = (-1)^n \tan \frac{1}{n}$ $\boxed{\text{converge}}$.

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/n} \sin \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{e^{\frac{1}{n} \ln n}}_{e^0} \cdot \underbrace{\sin \frac{1}{n}}_0 = 0$

Considérons la fonction $f(x) = e^{\frac{\ln x}{x}} \cdot \sin \frac{1}{x}$.

$$\text{Sa dérivée vaut : } f'(x) = \underbrace{\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x} \ln x}}_{>0} \left[\underbrace{(1 - \ln x) \sin \frac{1}{x}}_0 - \underbrace{\cos \frac{1}{x}}_{-1} \right]$$

$\Rightarrow f'(x)$ est négative à partir d'un certain x_0 , donc $f(x)$ est décroissante à partir d'un certain x_0 . Donc $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante à partir d'un certain rang. $\boxed{\text{La série converge}}$.

15.20 Corrigé du 13.20 Série comparée

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{Log} n}{n^2} = 0$, car toute puissance l'emporte sur le logarithme. Donc la suite (u_n) où $n \in \mathbb{N}^*$ converge.
2. Pour étudier la convergence de la série (suite des sommes partielles), on utilise la comparaison avec une intégrale :
soit $f(x) = \frac{\operatorname{Log} x}{x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1-2\operatorname{Log} x}{x^3}$ et $\lim_{+\infty} f = 0$; on montre facilement que f décroît vers zéro à partir de \sqrt{e} (Tab. 15.4).
3. En posant $u = \operatorname{Log} x$, donc $du = \frac{dx}{x}$ et $x = e^u$, on calcule :
- $$I = \int_1^\infty \frac{\operatorname{Log} x}{x^2} dx = \int_0^\infty \frac{u}{e^u} du = \int_0^\infty u e^{-u} du = [-e^{-u}(1+u)]_0^\infty = 1$$

TABLE 15.4 – Tableau de variation de $f(x)$.

x	0	\sqrt{e}	$+\infty$
f'	+	0	-
$0 < f$	\nearrow		\searrow
			0

Donc l'intégrale converge et la série $\left(\frac{\text{Log} n}{n^2}\right)$ aussi.

N.B. : On peut aussi utiliser l'intégration par parties pour calculer I :
 $u' = 1/x^2$ et $v = \text{Log} x \Rightarrow u = -1/x$ et $v' = 1/x$.

15.21 Corrigé du 13.21 Sommes

1. Calculons la somme partielle :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N u_n &= \sum_{n=1}^N \text{Log} \cos \frac{x}{2^n} = \text{Log} \prod_{n=1}^N \cos \frac{x}{2^n} = \text{Log} \prod_{n=1}^N \frac{\sin \frac{x}{2^{n-1}}}{2 \sin \frac{x}{2^n}} \\ &= \text{Log} \left[\frac{1}{2^N} \prod_{n=1}^N \frac{\sin \frac{x}{2^{n-1}}}{\sin \frac{x}{2^n}} \right] = \text{Log} \left[\frac{1}{2^N} \left(\frac{\sin x}{\sin \frac{x}{2^N}} \right) \right] \end{aligned}$$

2. Calculons la limite quand $n \rightarrow \infty$: on a $\sin \frac{x}{2^N} \underset{N \rightarrow \infty}{\sim} \frac{x}{2^N}$ donc :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \text{Log} \left[\frac{1}{2^N} \frac{\sin x}{\frac{x}{2^N}} \right] = \text{Log} \left[\frac{\sin x}{x} \right].$$

15.22 Corrigé du 13.22 Reste

1. $u_k = \frac{1}{k(k+1)} < \frac{1}{k^2}$ donc la comparaison à la série de Riemann convergente d'exposant $\alpha = 2$ prouve que la série (u_k) converge. Décomposons u_k :
 $u_k = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ donc la somme partielle vaut :

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Conclusion : $\boxed{S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1}$

2. Appliquons le critère de d'Alembert :

$$\left| \frac{u_{k+1}}{u_k} \right| = \frac{k+1}{2^{k+1}} \cdot \frac{2^k}{k} = \frac{1}{2} \left(\frac{k+1}{k} \right) = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{k} \right]$$

$$\boxed{\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{k+1}}{u_k} \right| = \frac{1}{2} < 1}, \text{ donc la série } S_n \text{ converge vers } S.$$

On a $S = S_n + R_n$, où $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{k}{2^k}$ et $\sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k}$.

La somme partielle s'exprime astucieusement, en factorisant par $1/2$ et en posant $p = k - 1$:

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{k-1+1}{2^k} = \sum_{k=1}^n \frac{k-1}{2^k} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} \left[\sum_{p=0}^{n-1} \frac{p}{2^p} + \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{2^p} \right]$$

La 1^{re} somme partielle correspond à S_{n-1} , la 2^e correspond à une série géométrique de raison $r = 1/2$, qui converge vers 2.

Donc on a : $S_n = \frac{1}{2} [S_{n-1} + \frac{1-(1/2)^n}{1-(1/2)}]$. Si l'on passe à la limite ($n \rightarrow \infty$), on trouve donc :

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{2} [S + 2] \Rightarrow \boxed{S = 2}$$

Encadrons le reste R_n en factorisant u_{n+1} et en posant $p = k - (n+1)$:

$$\begin{aligned} R_n &= u_{n+1} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{u_k}{u_{n+1}} = u_{n+1} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{k}{n+1} 2^{n+1-k} \\ &= u_{n+1} \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{n+1+p}{n+1} \right) \left(\frac{1}{2} \right)^p = u_{n+1} \sum_{p=0}^{\infty} \left(1 + \frac{p}{n+1} \right) \left(\frac{1}{2} \right)^p \end{aligned}$$

On reconnaît la somme d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$, qui converge vers 2. Donc : $R_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} 2u_{n+1}$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$.

Pour avoir $R_n = 10^{-2}$, $n = 11$ suffit (cf. Tab 15.5).

15.23 Corrigé du 13.23 Rayon

$$1. \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 \text{ donc } \boxed{R = +\infty}$$

N.B. : cf. développement de l'exponentiel : $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

$$2. \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = |x| \left(\frac{n}{n+1} \right)^{\alpha} \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = |x| \Rightarrow \boxed{R = 1}$$

$$3. u_n(x) = a_n x^n \text{ avec } a_n = n^{\log n}. \text{ On a donc : } \sqrt[n]{a_n} = n^{\frac{\log n}{n}} = \exp \frac{\log^2 n}{n} \\ \text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1 \Rightarrow \boxed{R = 1}$$

TABLE 15.5 – Suite de valeurs arrondies.

n	u_n	S_n
10	0.0098	1.9883
11	.0054	1.9936
12	.0029	1.9966
...		...
18	0.0001	1.9999

4. Développement de : $\frac{1}{1+x} = \sum_0^\infty (-1)^n x^n$. On a $u_n(x) = (-1)^n x^n$ donc $|\frac{u_{n+1}}{u_n}| = |x|$ dont la limite doit être $< 1 \Rightarrow \boxed{R=1}$
5. Développement de : $\text{Log}(1+x) = \sum_1^\infty (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$
 On a : $|\frac{u_{n+1}}{u_n}| = |x| \frac{n}{n+1} \Rightarrow \boxed{R=1}$

15.24 Corrigé du 13.24 Cauchy-Alembert

1. Appliquons le critère de Cauchy :

$$\sqrt[n]{u_n} = |x| \sqrt[n]{1 + \frac{1}{[2x^2]^n}}$$

$$\text{Or } 1 + \frac{1}{(2x^2)^n} \underset{n \rightarrow \infty}{\simeq} \begin{cases} 1 & \text{si } 2x^2 > 1 \Leftrightarrow |x| > 1/\sqrt{2} \\ 2 & \text{si } 2x^2 = 1 \Leftrightarrow |x| = 1/\sqrt{2} \\ \frac{1}{(2x^2)^n} & \text{si } 2x^2 < 1 \Leftrightarrow |x| < 1/\sqrt{2} \end{cases}$$

Dans les 2 premiers cas, on obtient : $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = |x|$.

Dans le troisième cas, on obtient : $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{2|x|}$.

La convergence étant assurée si $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} < 1$, on conclut que la série S_1

converge si $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq |x| < 1$ ou $\frac{1}{2} < |x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$, soit $\boxed{\frac{1}{2} < |x| < 1}$.

2. On applique le critère de d'Alembert :

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{|x|}{3} \cdot \left| \frac{n \ln(n)}{(n+1) \ln(n+1)} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{3}$$

Donc S_2 converge ssi $\boxed{|x| < 3}$.

3. Appliquons le critère de d'Alembert :

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \left| \frac{(x+5)^2}{4} \cdot \frac{n}{n+1} \right| \quad \text{donc} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{(x+5)^2}{4}$$

Donc S_3 converge ssi : $\frac{(x+5)^2}{4} < 1 \Leftrightarrow |x+5| < 2 \Leftrightarrow \boxed{-7 < x < -3}$

4. On applique le critère de d'Alembert :

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \left| \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} \right| \cdot \left| \frac{x}{2} \right| = \left| \frac{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{2}{n}} \right| \left| \frac{x}{2} \right| \text{ donc } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \left| \frac{x}{2} \right|$$

Donc S_4 converge ssi : $\boxed{|x| < 2}$

15.25 Corrigé du 13.25 Converge de séries

1. On applique le critère de d'Alembert :

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = |2-x| \frac{n+1}{n+2} \sqrt[3]{\frac{n+3}{n+2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |2-x|$$

Donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < 1 \Leftrightarrow |2-x| < 1 \Leftrightarrow \boxed{1 < x < 3}$

2. Critère de d'Alembert :

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = |1-x| \left(\frac{2n+1}{3n+1} \right)^{2n+2} \left(\frac{3n-2}{2n-1} \right)^{2n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |1-x| \left(\frac{2}{3} \right)^{2n+2} \left(\frac{3}{2} \right)^{2n}$$

Donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < 1 \Leftrightarrow |1-x| \left(\frac{2}{3} \right)^2 < 1 \Leftrightarrow |1-x| < \frac{9}{4} \Leftrightarrow \boxed{-\frac{5}{4} < x < \frac{13}{4}}$

3. Critère de d'Alembert :

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \left| \frac{1}{x-2} \cdot \frac{n+1}{n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x-2|}$$

Donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < 1 \Leftrightarrow |x-2| > 1 \Leftrightarrow \boxed{x > 3 \text{ ou } x < 1}$

15.26 Corrigé du 13.26 Carré

C'est un cas particulier du cas général étudié en section 13.27.

Le Fig. 15.5 illustre le résultat de l'approximation d'un signal carré par son DSF limité à l'harmonique $N = 9$. Plus on augmente le nombre d'harmoniques, meilleure est l'approximation.

15.27 Corrigé du 13.27 Rectangle

Etudions d'abord le cas général d'un signal rectangulaire de rapport cyclique α . Le signal carré s'en déduit ensuite aisément comme un cas particulier où $\alpha = 0.5$.

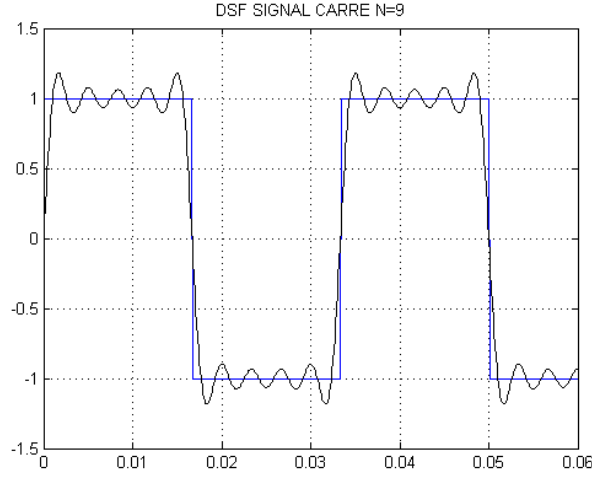


FIGURE 15.5 – Approximation d'un signal carré par son DSF.

1. Soit le signal périodique rectangulaire $r(t)$ pair, de période T , d'amplitude E et de rapport cyclique α , représenté sur la Fig. 13.1, p.197.

Sa valeur moyenne vaut :

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T r(t) dt = \frac{1}{T/2} \int_0^{T/2} r(t) dt = \frac{2}{T} \left(E \frac{\alpha T}{2} - E \frac{(1-\alpha)T}{2} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{a_0 = E(2\alpha - 1)}$$

Pour les autres coefficients de la DSF, il n'y a pas de terme en sinus, puisque la fonction est paire. Le terme général en cosinus aura l'amplitude (avec $\omega = \frac{2\pi}{T}$) :

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T r(t) \cos(n\omega t) dt = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} r(t) \cos(n\omega t) dt$$

$$a_n = \frac{4}{T} \left(\int_0^{\alpha T/2} E \cos(n\omega t) dt + \int_{\alpha T/2}^{T/2} (-E) \cos(n\omega t) dt \right)$$

$$a_n = \frac{4E}{T} \left(\left[\frac{\sin(n\omega t)}{n\omega} \right]_0^{\frac{\alpha T}{2}} - \left[\frac{\sin(n\omega t)}{n\omega} \right]_{\frac{\alpha T}{2}}^{\frac{T}{2}} \right) = \frac{2E}{n\pi} (2 \sin(n\alpha\pi) - \sin(n\pi))$$

$$\Rightarrow \boxed{a_n = \frac{4E}{n\pi} \sin(n\alpha\pi)}$$

Soit le développement :
$$r(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(n\omega t)$$

2. Cas particulier du signal carré ($\alpha = 0.5$) :

On a alors bien sûr : $a_0 = 0$ (valeur moyenne nulle).

D'autre part :
$$\begin{cases} \sin(n\pi/2) = 0 & \text{pour } n = 2k \\ \sin(n\pi/2) = (-1)^k & \text{pour } n = 2k + 1 \end{cases}$$

En résumé : $a_{2k} = 0$ et
$$a_{2k+1} = (-1)^k \frac{4E}{(2k+1)\pi}$$

D'où :
$$r(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{4E}{(2k+1)\pi} \cos((2k+1)\omega t)$$

Seuls les harmoniques de rang impair sont donc présents, et leur amplitude est inversement proportionnelle à ce rang :

$$\frac{a_{2k+1}}{a_1} = \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

Valeurs particulières : $a_1 = 4E/\pi$

$$\begin{aligned} |a_3/a_1| &= 1/3 && \text{soit -9.5 dB par rapport à } a_1 \\ |a_5/a_1| &= 1/5 && \text{soit -14.0 dB par rapport à } a_1 \\ |a_7/a_1| &= 1/7 && \text{soit -16.9 dB par rapport à } a_1 \text{ etc.} \end{aligned}$$

15.28 Corrigé du 13.28 Triangle pair

On montre que sa décomposition en série de Fourier donne (où $\omega = 2\pi/T$) :

$$s(t) = \frac{E}{2} + \frac{4E}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos(2k+1)\omega t$$

On constate donc qu'il n'y a que des harmoniques impairs qui décroissent proportionnellement au carré de leur ordre :

$$\frac{a_{2k+1}}{a_1} = \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

15.29 Corrigé du 13.29 Double alternance

1. Le signal $x(t) = A|\sin(\omega t)|$ est pair donc : $\forall k, b_k = 0$.

La pulsation vaut : $\omega = \frac{2\pi}{T}$ où T est la période du signal.

2. Calcul de la composante continue (valeur moyenne) :

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} x(t) dt = \frac{2A}{T} \int_0^{T/2} \sin(\omega t) dt = \frac{2A}{\pi}$$

3. Calcul des coefficients pour $k \in \mathbb{N}^*$:

$$a_k = \frac{4A}{T} \int_0^{T/2} \sin \omega t \cos(k\omega t) dt = \frac{2A}{\pi(k^2-1)} [(-1)^{k+1} - 1]$$

$$\begin{cases} \text{si } k = 2p + 1 & \text{alors } a_k = a_{2p+1} = 0 \\ \text{si } k = 2p & \text{alors } a_k = a_{2p} = \frac{-4A}{\pi(4p^2-1)} \end{cases}$$

4. Expression de $f(t)$:

$$f(t) = A \left[\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{4p^2-1} \cos(2p\omega t) \right]$$

5. Représentation spectrale : présence d'une composante continue et des harmoniques impairs ayant une décroissance d'amplitude en $1/n^2$.

15.30 Corrigé du 13.30 DDS

La fonction n'est ni paire, ni impaire.

La composante continue (valeur moyenne) vaut : $a_0 = A/2$.

Il n'y a pas de terme en cosinus ($\forall n \neq 0, a_n = 0$), mais seulement des termes

en sinus : $b_n = -\frac{A}{n\pi}$. D'où le DSF du signal en dents de scie positif :

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi}{T} nt\right)$$

On a donc la présence de tous les harmoniques, qui décroissent en $1/n$.

cf. Autres exercices sur le signal DDS : 13.87 et 13.85.

15.31 Corrigé du 13.31 Triangle

1. On pose $\omega = 2\pi/T$ la pulsation. Si l'on choisit la fonction impaire de valeur moyenne nulle, telle que $f(t) = \frac{2A}{T}t$ sur $[-T/4; T/4]$, alors $a_0 = a_k = 0$ et

$$b_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin k\omega t dt, \text{ d'où } f(t) = \sum_1^{\infty} b_k \sin(k\omega t).$$

Pour calculer b_k , on utilise la symétrie : $t \in [0; \frac{T}{2}] \Rightarrow f(t) = f(\frac{T}{2} - t)$.

Donc $\int_0^{T/2} \dots = \int_0^{T/4} \dots + \int_{T/4}^{T/2} f(\frac{T}{2} - t) \sin(k\omega t) dt$. Par changement de variable $u = T/2 - t$, et considérant que $\sin(-\theta + k\pi) = (-1)^{k+1} \sin \theta$,

on trouve : $b_k = \frac{4}{T} \left[\int_0^{T/4} \dots + (-1)^{k+1} \int_0^{T/4} \dots \right]$ d'où : $b_{2n} = 0$ et $b_{2n+1} = \frac{16A}{T^2} \int_0^{T/4} t \sin(2n+1)\omega t dt$.

En utilisant l'intégration par parties (avec $u = t$ et $v' = \sin(2n+1)\omega t$), on obtient : $b_{2n+1} = \frac{4A}{\pi^2} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$

Et finalement :

$$f(t) = \frac{4A}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \sin[(2n+1)\omega t]$$

2. Graphique : voir Fig. 15.6

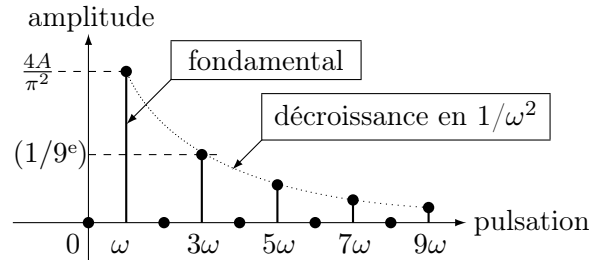


FIGURE 15.6 – Décomposition fréquentielle du signal triangulaire.

3. Interprétation : pas de composante continue ; uniquement des harmoniques impairs, dont la décroissance est en $1/x^2$.

N.B. : Comparée à la fonction paire $g(t)$ qui se développe en cosinus, on a : $f(t) = g(t + T/4)$, et on vérifie que : $\cos[(2n+1)\omega(t + \frac{T}{4})] = \cos[(2n+1)\omega t + (2n+1)\frac{\pi}{2}] = (-1)^n \sin[(2n+1)\omega t]$

15.32 Corrigé du 13.32 Onduleur

1. $v(t)$ est une fonction impaire. Son DSF vaut : $v(t) = \sum_1^{\infty} b_n \sin n\omega t$ où $b_n =$

$$\frac{4}{T} \int_0^{T/2} v(t) \sin(n\omega t) dt \quad (\text{car } a_0 = a_n = 0).$$

$$\text{Le calcul donne : } b_n = \frac{4E}{T} \int_{\tau/2}^{(T-\tau)/2} \sin(n\omega t) dt = \frac{4E}{T} \left[\frac{-\cos n\omega t}{n\omega} \right]_{\tau/2}^{(T-\tau)/2}$$

Considérant que : $\omega T = 2\pi$ et que : $\cos(n\pi - \theta) = (-1)^n \cos \theta$, on obtient : $b_n = \frac{2E}{n\pi} [1 - (-1)^n] \cos(n\omega\tau/2)$

Donc : $b_{2k} = 0$ et $b_{2k+1} = \frac{4E}{(2k+1)\pi} \cos(2k+1)\omega\tau/2$.

D'où :

$$v(t) = \frac{4E}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)\omega\tau/2}{2k+1} \sin[(2k+1)\omega t]$$

et $u(t) = v(t - \tau/2)$

2. Le spectre d'amplitude est le module de la TF. On a :

$TF[u(t)] = TF[\sum b_n \sin n\omega t] = \sum b_n TF[\sin n\omega t]$. Or $TF[\sin 2\pi\nu_0 t] = \frac{1}{2j}[\delta(\nu - \nu_0) - \delta(\nu + \nu_0)]$ où $\nu_0 = 1/T$ est la fréquence. D'où :

$$U(\nu) = TF[u(t)] = \frac{1}{2j} \sum_{k=0}^{\infty} b_{2k+1} [\delta(\nu - (2k+1)\nu_0) + \delta(\nu - (2k+1)\nu_0)]$$

$|U(\nu)|$ est donc un spectre de raies impaires décroissant en $1/\nu$.

3. Pour annuler l'harmonique 3, il faut : $b_3 = 0 \Leftrightarrow \cos(3\pi\tau/T) = 0$.

Ceci s'obtient si $\frac{3\pi\tau}{T} = (2m+1)\frac{\pi}{2}$ avec $m \in \mathbb{N}$, sous la contrainte : $0 \leq \frac{\tau}{2} \leq$

$$\frac{T}{2} - \frac{\tau}{2} \Leftrightarrow 0 \leq \tau \leq \frac{T}{2}. \text{ La seule solution est } m = 0 \Rightarrow \boxed{\tau = \frac{T}{6}}$$

Annulation de l'harmonique 5 : $b_5 = 0 \Leftrightarrow \frac{5\pi\tau}{T} = (2m+1)\frac{\pi}{2}$. Il y a 2 solutions

$$\text{respectant la contrainte : } m = 0 \text{ ou } 1 \Rightarrow \boxed{\tau = \frac{T}{10} \text{ ou } \frac{3T}{10}}.$$

N.B. : On peut calculer le taux de distorsion harmonique D :

$$D = \frac{\sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} b_n^2}}{|b_1|}$$

qui s'exprime en %, le tracer en fonction de τ pour les 15 premiers harmoniques, le majorer (car $\cos^2 \theta \leq 1$), et trouver son minimum. On retrouve alors que la valeur $\tau = T/6$ est proche du minimum de distorsion, donc qu'elle correspond à un fonctionnement optimum de l'onduleur (meilleure approximation de la sinusoïde pure en terme énergétique, au sens des moindres carrés).

15.33 Corrigé du 13.33 Créneaux

1. $f(x)$ est continue sur $[-\pi; +\pi]$ sauf en un nombre fini de points où elle admet des discontinuités de 1ère espèce. L'intervalle $[-\pi; +\pi]$ est divisible en un nombre fini d'intervalles partiels dans chacun desquels $f(x)$ est monotone. Donc $f(x)$ vérifie bien les CD puisqu'elle a un nombre fini de discontinuités et d'extrema.

2. Le DSF de la fonction s'exprime : $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$.

Les coefficients valent : $a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx$; $a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx$;
 $b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx$.

Or : $\begin{cases} f(x) = x & \text{sur } [0; \pi] \\ f(x) = -\pi & \text{sur } [\pi; 2\pi] \end{cases}$

On divise donc l'intervalle d'intégration en deux intervalles partiels pour calculer chacune des 3 intégrales :

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{\pi} x dx + \int_{\pi}^{2\pi} -\pi dx \right] = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi} - \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{a_0 = -\frac{\pi}{4}}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\pi} x \cos(nx) dx + \int_{\pi}^{2\pi} -\pi \cos(nx) dx \right]$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\pi} x \sin(nx) dx + \int_{\pi}^{2\pi} -\pi \sin(nx) dx \right]$$

Pour les 2 intégrales donnant a_n et b_n pour $n \neq 0$, on utilise l'intégration par parties (en posant $u = x$ et $v' = \cos nx$ ou $v' = \sin nx$) :

$$a_n = \frac{1}{n^2\pi} [\cos(n\pi) - 1] \text{ donc } \boxed{a_{2n} = 0} \text{ et } \boxed{a_{2n+1} = -\frac{2}{\pi(2n+1)^2}}$$

$$b_n = \frac{1-2\cos n\pi}{n} \text{ donc } \boxed{b_{2n} = -\frac{1}{2n}} \text{ et } \boxed{b_{2n+1} = \frac{3}{2n+1}}$$

3. On a :

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{-2}{\pi(2n+1)^2} \cos(2n+1)x \right] \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{-1}{2n} \sin 2nx \right] + \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{3}{2n+1} \sin(2n+1)x \right] \end{aligned}$$

Par convention (cf. § 3.4), en un point de discontinuité x_i , on a :

$$f(x_i) = \frac{1}{2} [f(x_i + 0) + f(x_i - 0)] \Rightarrow \boxed{f(0) = -\pi/2 \text{ et } f(\pi) = 0}.$$

En appliquant le DSF aux points $x = 0$ et $x = \pi$, on trouve :

$$f(0) = -\frac{\pi}{2} \stackrel{DSF}{=} -\frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-2}{\pi(2n+1)^2} + 0 \Rightarrow \boxed{S_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}}$$

$$\text{et } f(\pi) = 0 = -\frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{\pi(2n+1)^2} + 0 \Rightarrow S_1 = \frac{\pi^2}{8}. \text{ CQFD}$$

4. Pour $x = \pi/2$:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{2n+1} \sin(2n+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{S_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}}$$

5. Application de la formule de l'Eq.(3.4), p.43 :

$$\frac{1}{2\pi} \left[\int_0^\pi x^2 dx + \int_\pi^{2\pi} (-\pi)^2 dx \right] = \frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{2} \left[\sum_0^\infty a_{2n+1}^2 + \sum_1^\infty \left(\frac{-1}{2n} \right)^2 + \sum_0^\infty \left(\frac{3}{2n+1} \right)^2 \right] \Leftrightarrow$$

$$\frac{5\pi^2}{12} = \frac{2}{\pi^2} S_4 + \frac{1}{8} S_3 + \frac{9}{2} S_1 \Rightarrow \boxed{S_4 = -\frac{\pi^4}{12}}$$

6. La dérivée vaut : $\begin{cases} g(x) = 1 & \text{sur }]0; \pi[\\ g(x) = 0 & \text{sur }]\pi; 2\pi[\\ g(0) = g(\pi) = 1/2 & \text{par convention} \end{cases}$

$$\text{Donc : } a'_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi dx \Rightarrow \boxed{a'_0 = \frac{1}{2}} ; a'_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos nx dx \Rightarrow \boxed{a'_n = 0}$$

$$b'_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin nx dx = \frac{1 - \cos n\pi}{n\pi} \Rightarrow \boxed{b'_{2n} = 0 \text{ et } b'_{2n+1} = \frac{2}{\pi(2n+1)}}$$

7. On applique les formules du § 3.10.2. Les sauts de discontinuité de $f(x)$ en $\pm\pi$ et en $x_1 = 0$ valent : $\delta_0 = f(\pi - 0) - f(-\pi + 0) = 2\pi$ et $\delta_1 = f(0^+) - f(0^-) = \pi$

donc $a'_0 = \frac{1}{2\pi} [\delta_0 - \delta_1] = \frac{1}{2}$, qui correspond à la valeur moyenne.

$$a'_n = \frac{1}{\pi} [(-1)^n \delta_0 - \delta_1 \cos nx_1] + nb_n = [2(-1)^n - 1] + nb_n = 0$$

$$\text{et } b'_n = -\frac{1}{\pi} \delta_1 \sin nx_1 - na_n = 0 - na_n.$$

8. Le DSF de la dérivée vaut : $g(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^\infty \frac{2}{\pi(2n+1)} \sin(2n+1)x$

On l'applique en $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin(2n+1)x = (-1)^n$ et $g(x) = 1$

$$\text{D'où : } 1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} S_2 \Rightarrow S_2 = \frac{\pi}{4}. \text{ CQFD}$$

15.34 Corrigé du 13.34 Wallis

Développement en série de Fourier de $f(x) = \cos(\alpha x)$

avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

La fonction est paire $\Rightarrow \mathbf{b_k = 0 \quad \forall k}$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi \cos \alpha x dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos \alpha x dx \Rightarrow a_0 = \frac{\sin \alpha \pi}{\alpha \pi}$$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos \alpha x \cos kx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [\cos(\alpha + k)x + \cos(\alpha - k)x] dx$$

$$\dots \quad \boxed{a_k = \frac{2\alpha}{\pi} \sin \alpha \pi \frac{(-1)^k}{\alpha^2 - k^2}}$$

d'où le DSF de $\cos(\alpha x)$:

$$\cos \alpha x = \frac{\sin \alpha \pi}{\alpha \pi} + \frac{2\alpha}{\pi} \sin \alpha \pi \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k}{\alpha^2 - k^2} \cos kx$$

Calcul de $\frac{\sin \pi x}{\pi x}$

On pose : $x = \pi$ dans le DSF de $\cos(\alpha x)$.

$$\Rightarrow \cos \alpha \pi = \frac{\sin \alpha \pi}{\alpha \pi} + \frac{2\alpha}{\pi} \sin \alpha \pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\alpha^2 - k^2} \overbrace{\cos k\pi}^{(-1)^k}$$

On divise par $\sin(\alpha \pi)$:

$$\cotg \alpha \pi - \frac{1}{\alpha \pi} = -\frac{2\alpha}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 - \alpha^2}$$

Pour $0 \leq \alpha < 1$, la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 - \alpha^2}$ converge et on peut intégrer les deux membres de l'égalité entre 0 et $x < 1$:

$$\int_0^x \left(\cotg \pi \alpha - \frac{1}{\pi \alpha} \right) dx = -\frac{1}{\pi} \int_0^x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\alpha dx}{k^2 - \alpha^2}$$

$$\text{Notons : } S_1 = \int_0^x \left(\cotg \pi \alpha - \frac{1}{\pi \alpha} \right) d\alpha \quad \text{et} \quad S_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-2\alpha dx}{k^2 - \alpha^2}$$

Alors :

$$S_1 = \int_0^x \frac{\cos \pi \alpha}{\sin \pi \alpha} d\alpha - \frac{1}{\pi} \int_0^x \frac{d\alpha}{\alpha} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\varepsilon}^x \frac{\cos \pi \alpha}{\sin \pi \alpha} d\alpha - \frac{1}{\pi} \int_{\varepsilon}^x \frac{d\alpha}{\alpha} \right]$$

$$\text{Posons : } u = \sin \pi \alpha \Rightarrow du = \pi \cos \pi \alpha d\alpha.$$

$$\begin{aligned} S_1 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \left[\int_{\sin \pi \varepsilon}^{\sin \pi x} \frac{du}{u} - \int_{\varepsilon}^x \frac{d\alpha}{\alpha} \right] = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left([\ln u]_{\sin \pi \varepsilon}^{\sin \pi x} - [\ln \alpha]_{\varepsilon}^x \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\ln(\sin \pi x) - \ln(\sin \pi \varepsilon) - \ln x + \ln \varepsilon] \end{aligned}$$

or $\sin \pi \varepsilon \underset{0}{\sim} \pi \varepsilon$ (équivalent usuel)

$$\text{donc : } \ln \sin \pi \varepsilon \underset{0}{\sim} \ln \pi \varepsilon = \ln \pi + \ln \varepsilon$$

$$\text{d'où : } S_1 = \frac{1}{\pi} (\ln \sin \pi x - \ln \pi - \ln x) = \frac{1}{\pi} \ln \frac{\sin \pi x}{\pi x}$$

$$\text{D'autre part : } S_2 = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^x \frac{-2\alpha d\alpha}{k^2 - \alpha^2} \quad \text{posons} \quad \begin{cases} u = k^2 - \alpha^2 \\ du = -2\alpha d\alpha \end{cases}$$

$$S_2 = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{k^2}^{k^2 - x^2} \frac{du}{u} = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} [\ln u]_{k^2}^{k^2 - x^2} = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} [\ln(k^2 - x^2) - \ln k^2]$$

$$S_2 = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{x^2}{k^2} \right) = \frac{1}{\pi} \ln \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2} \right)$$

Finalement, comme $S_1 = S_2$, on en déduit que : $\frac{\sin \pi x}{\pi x} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2} \right)$.

Formule de Wallis

On peut écrire : $\frac{\pi x}{\sin \pi x} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k^2 - x^2} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+x} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k-x}$

En posant : $x = \frac{1}{2}$ (< 1), on obtient aisément :

$$\boxed{\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{4n} (n!)^4}{(2n+1) [(2n)!]^2}}$$

15.35 Corrigé du 13.35 Circuit RL série

1. $i(t) = \frac{E}{R} (1 - e^{-t/\tau})$
2. $i(t) = \frac{\alpha}{R} [t - \tau(1 - e^{-t/\tau})]$
N.B. : $i(\infty) \sim \frac{\alpha}{R} (t - \tau)$
3. A.N. : $\tau = \frac{L}{R} = 50 \text{ ns}$

15.36 Corrigé du 13.36 EDL du 2nd ordre

EDL du second ordre (cas $\omega_0 = 1$)

N.B. : Cas $\Delta < 0$

$$u(t) = \left(\frac{1}{5} \sin t + \frac{2}{5} \cos t\right) e^{-t} + \left(\frac{1}{5} \sin t - \frac{2}{5} \cos t\right)$$

Autre écriture en posant $\tan \phi = -1/2$ et $\tan \psi = -2$:

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cos(t + \phi) e^{-t} + \frac{1}{\sqrt{5}} \sin(t + \psi)$$

15.37 Corrigé du 13.37 Circuit RLC parallèle

N.B. : Cas $\Delta < 0$

1. $e(t) = \frac{I}{C} e^{-\alpha t} \sin \beta t$
A.N. : $f_n = \beta/(2\pi) = 15.9 \text{ kHz}$ et $\tau = 1/\alpha = 2RC = 0.24 \text{ ms}$
2. $e(t) = \frac{I}{C} [e^{-\alpha t} A_0(\omega) \cos(\beta t + \phi_0(\omega)) + A_1(\omega) \cos(\omega t + \phi_1(\omega))]$

Solution avec la TL :

$$\begin{aligned}
 e(t) &= \frac{I_0}{C} \frac{1}{Den} \left[e^{-\alpha t} \left[A_1 \cos \beta t + \frac{B_1}{\beta} \sin \beta t \right] + C_1 \cos \omega t + D_1 \sin \omega t \right] \\
 A_1 &= S\omega^2 \\
 B_1 &= P^2 + \omega^2 \left(\frac{S^2}{2} - P \right) \\
 C_1 &= -S\omega^2 \\
 D_1 &= \omega(\omega^2 - P) \\
 Den &= (P - \omega^2)^2 + (S\omega)^2 \text{ avec : } P = \frac{1}{LC} \text{ et : } S = \frac{-1}{RC} = -2\alpha \\
 \beta &= \frac{1}{2} \sqrt{4P - S^2} = \frac{1}{2RC} \sqrt{\frac{4R^2C}{L} - 1}
 \end{aligned} \tag{15.3}$$

15.38 Corrigé du 13.38 Régime apériodique

N.B. : Cas $\Delta = 0$

$$u(t) = \left[\left(E + \frac{2}{5} \right) t + \left(E + \frac{4}{25} \right) \right] e^{-t} - \frac{3}{25} \sin 2t - \frac{4}{25} \cos 2t$$

15.39 Corrigé du 13.39 Propagation de virus

1. $y = \frac{1}{p} \Rightarrow y' = -\frac{p'}{p^2}$ donc l'équation s'exprime : $y' = a(1 - 100y)$.
2. La solution de $y' + 100ay = a$ est la somme de y_g , qui est la solution générale sans 2nd membre, et de y_p , qui est une solution particulière avec 2nd membre.

L'équation caractéristique est : $r + 100a = 0 \Leftrightarrow r = -100a$

Donc $y_g = K \exp(-100at)$.

Le 2nd membre est une constante, donc $y_p = B \Rightarrow y'_p = 0$. Remplaçons dans l'EDL : $0 + 100aB = a \Rightarrow B = 1/100$.

D'où $y = y_g + y_p = K \exp(-100at) + B$. Pour déterminer les constantes K et a , on exploite les conditions aux 2 instants initiaux :

$$\begin{cases} \text{à } t_0 = 0 : & y(0) = y_0 = K + B \Rightarrow K = y_0 - B = 9.99 \\ \text{à } t_1 = 5 : & y(t_1) = y_1 = K e^{-100at_1} + B \Rightarrow a = -\frac{\ln\left(\frac{y_1 - B}{K}\right)}{100t_1} = 0.0032 \end{cases}$$

3. La Fig. 15.7 montre l'évolution de $p(t) = 1/y(t)$.

4. $t_{95\%} \approx 31$ jours, soit 1 mois.

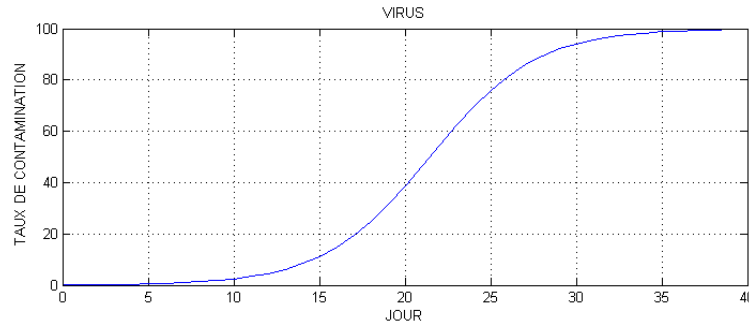


FIGURE 15.7 – Evolution de la contamination.

15.40 Corrigé du 13.40 Calcul de TL

1. — $f(t) = 3[\mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t-5)] \Rightarrow F(p) = \frac{3}{p}[1 - e^{-5p}]$
 — $g(t) = [-t\mathcal{U}(t) + t\mathcal{U}(t-20)] + [(-2t+20)\mathcal{U}(t-20) - (-2t+20)\mathcal{U}(t-30)] - 40\mathcal{U}(t-30) \Leftrightarrow g(t) = -t\mathcal{U}(t) - (t-20)\mathcal{U}(t-20) + 2(t-30)\mathcal{U}(t-30)$
 ou bien, on utilise la règle de dérivation :
 $g'(t) = -\mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t-20) + 2\mathcal{U}(t-30) \Rightarrow pG(p) - g(0) = \dots$
 $\Rightarrow G(p) = \frac{1}{p^2}[-1 - e^{-20p} + 2e^{-30p}]$
2. — $F(p) = \frac{-2p+3}{p^2+1}$
 — $G(p) = \frac{1}{(p-5)^2+1} = \frac{1}{p^2-10p+26}$
 — $H(p) = \frac{-2p+15}{p^2+25}$
 — $K(p) = \frac{2}{(p-5)^2+4} = \frac{2}{p^2-10p+29}$

15.41 Corrigé du 13.41 EDL du 2nd ordre

A comparer avec le corrigé 15.36 de l'exercice 13.36 (solution classique pour $\omega_0 = 1$).

$$u(t) = \frac{1}{\omega^4 + 4} [-2\omega \cos \omega t + (2 - \omega^2) \sin \omega t + e^{-t}(2\omega \cos t + \omega^3 \sin t)] \quad (15.4)$$

15.42 Corrigé du 13.42 Calcul d'un original

$$h(t) = \frac{1}{2} [-e^{-2t} + e^{-t}(\cos t + \sin t)]$$

15.43 Corrigé du 13.43 Circuit RC par TL

1. Pour la réponse à un échelon : voir la solution détaillée de l'exercice 13.89.
La fonction de transfert vaut : $H(p) = 1/(1 + \tau p)$ où $\tau = RC$, et la tension de sortie : $v_s(t) = [1 - e^{-t/\tau}] \mathcal{U}(t)$, où $\mathcal{U}(t)$ est l'échelon unité.
2. Pour la réponse à une sinusoïde :
soit la tension d'entrée $v_3(t) = E \sin \omega_0 t$, alors $V_3(p) = \frac{E\omega_0}{p^2 + \omega_0^2}$. Donc :
 $V_s(p) = H(p) \times V_3(p)$ est une fraction qu'on décompose en éléments simples :
 $V_s(p) = \frac{A}{p + 1/\tau} + \frac{Bp + C}{p^2 + \omega_0^2}$ où $A = -B = \tau C$ avec $A = E\omega_0\tau/(1 + \tau^2\omega_0^2)$, puis on identifie chaque terme dans les tables de transformées pour remonter à l'original :

$$v_s(t) = A \left[e^{-t/\tau} - \cos \omega_0 t + \frac{1}{\tau\omega_0} \sin \omega_0 t \right] \mathcal{U}(t)$$

3. Interprétation : après un régime transitoire de durée liée à la constante de temps τ , on obtient en régime stationnaire une sinusoïde de même fréquence (ω_0), mais déphasée et atténuée en amplitude.

Démonstration : voir section 12.1, p.166

15.44 Corrigé du 13.44 RLC par TL

Soit $e(t)$ la tension d'entrée et $v(t)$ la tension de sortie aux bornes du condensateur C . Les lois de l'électricité donnent : $e(t) = Ri(t) + L \frac{di}{dt} + v(t)$ avec $i(t) = C \frac{dv}{dt}$.

D'où l'équation différentielle d'ordre 2 :

$$LC \frac{d^2v}{dt^2} + RC \frac{dv}{dt} + v(t) = e(t)$$

Pour un circuit relaxé (*i.e.* CI nulles), la transformation de Laplace conduit à :

$$(LCp^2 + RCp + 1)V(p) = E(p)$$

D'où la fonction de transfert : $T(p) = \frac{V(p)}{E(p)} = \frac{1}{1 + RCp + LCp^2}$. On pose habituellement : $\tau = \frac{1}{\omega_n} = \sqrt{LC}$ et $2\zeta\tau = RC \Leftrightarrow \zeta = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$ d'où les 2 expressions canoniques :

$$T(p) = \frac{1}{1 + 2\zeta\tau p + \tau^2 p^2} = \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 + 2\zeta\omega_n p + p^2} \quad (15.5)$$

Cette fonction de transfert possède deux pôles qui sont réels ou imaginaires suivant que l'amortissement ζ est supérieur ou inférieur à l'unité.

Si $e(t) = E \sin \omega_0 t$, alors $E(p) = \frac{E\omega_0}{p^2 + \omega_0^2}$. On en déduit que : $V(p) = T(p)E(p)$ est aussi une fraction, que l'on décompose en éléments simples, puis on identifie chaque terme grâce aux tables de transformées afin de remonter à l'original. On ne détaille pas la suite des calculs, car cela dépend des valeurs numériques choisies : on obtiendra en sortie une sinusoïde de même fréquence, mais atténuée ou amplifiée selon les cas, et plus ou moins déphasée.

15.45 Corrigé du 13.45 Impédance

Rappel des lois électriques : $i = C \frac{dv}{dt}$; $Q = \int i(t) dt = Cv$.

Notons $u_1(t)$ la tension aux bornes du condensateur C_1 .

A $t = 0^-$, on a $u_1(0) = E_1$ et $u(0) = E_2$, donc les CI sont non nulles.

1. Méthode classique : au début, on a les charges $Q_1 = C_1 E_1$ et $Q_2 = C_2 E_2$ aux bornes des condensateurs. La loi de conservation de la charge, après mise en parallèle des condensateurs, impose :

$$Q_{total}(0) = C_1 E_1 + C_2 E_2 = (C_1 + C_2) u(t \rightarrow \infty) \Rightarrow u(\infty) = \frac{C_1 E_1 + C_2 E_2}{C_1 + C_2}$$

2. Méthode symbolique (avec la TL) : notons i_1 et i_2 les courants à la fermeture de l'interrupteur. On doit avoir : $i_1 = -i_2 \Leftrightarrow C_1 \frac{du_1}{dt} = -C_2 \frac{du}{dt}$. Soit par transformation de Laplace, en tenant compte des CI :

$$C_1 [pU_1(p) - E_1] + C_2 [pU(p) - E_2] = 0$$

Or forcément : $U_1(p) = U(p)$, d'où : $p(C_1 + C_2)U(p) = C_1 E_1 + C_2 E_2$

$$\Rightarrow U(p) = \frac{C_1 E_1 + C_2 E_2}{C_1 + C_2} \times \frac{1}{p} \Rightarrow u(t^+) = \frac{C_1 E_1 + C_2 E_2}{C_1 + C_2} \mathcal{U}(t^+) = \text{cte}$$

3. Représentation graphique Fig. 15.8.

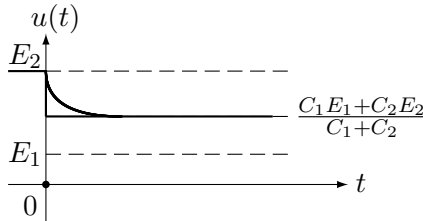


FIGURE 15.8 – Commutation de charge de condensateur.

Interprétation : $u(t)$ évolue instantanément pour se stabiliser à une valeur intermédiaire entre E_1 et E_2 : il y a transfert presque immédiat de charges entre les 2 condensateurs.

4. En pratique, les fils électriques présentent une petite résistance r dont il faudrait tenir compte dans le modèle : la transition suit donc une variation exponentielle rapide, dont la constante de temps est proportionnelle à r .

15.46 Corrigé du 13.46 Circuit

Si l'on note i , i_1 et i_2 les courants électriques circulant respectivement dans R , R_1 et C , alors les équations électriques du circuit sont :

$$u(t) = R_1 i_1(t) + v(t) \quad (15.6a)$$

$$v(t) = R i(t) \quad (15.6b)$$

$$i_2(t) = C \frac{dv}{dt} \quad (15.6c)$$

$$i_1(t) = i(t) + i_2(t) \quad (15.6d)$$

En substituant les termes, on obtient l'équation différentielle :

$$R_1 C \frac{dv}{dt} + \left(1 + \frac{R_1}{R}\right) v(t) = u(t)$$

1. Méthode traditionnelle :

La racine de l'équation caractéristique vaut $r = -\frac{R+R_1}{RR_1C}$. Donc la solution générale sans 2nd membre est du type : $y_{g0} = A.e^{rt}$.

Le second membre étant une constante $u(t) = E$, la solution particulière est aussi une constante : $y_p(t) = B$.

D'où la solution globale : $v(t) = Ae^{rt} + B$.

La condition initiale $v(0) = 0$ impose donc : $A + B = 0$. D'où l'on obtient : $v(t) = B(1 - e^{rt})$.

Quand $t \rightarrow \infty$ (régime stationnaire), on aura $v(t) \rightarrow B = \frac{R}{R+R_1}E$ car on obtient un simple pont diviseur de tension, le condensateur étant chargé.

2. Transformation de Laplace :

$$R_1 C [pV(p) - v(0^-)] + \left(1 + \frac{R_1}{R}\right) V(p) = U(p)$$

La CI étant nulle ($v(0^-) = 0$), on en déduit la fonction de transfert du circuit :

$$H(p) = \frac{V(p)}{U(p)} = \frac{1}{\left(1 + \frac{R_1}{R}\right) + R_1 C p} = \frac{R}{R + R_1} \left[\frac{1}{1 + \frac{RR_1}{R+R_1} C p} \right]$$

En notant $\tau = \frac{RR_1}{R + R_1} C = (R // R_1) C$ la constante de temps résultant

de la mise en parallèle de R et R_1 , et $K = \frac{R}{R + R_1}$ le gain statique, on retrouve le modèle d'une fonction de transfert du premier ordre :

$$\boxed{H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}} = \frac{K}{\tau} \frac{1}{p + \frac{1}{\tau}} \Rightarrow h(t) = \frac{K}{\tau} e^{-t/\tau} \text{ (Fig. 15.9a).}$$

Si $u(t) = E\mathcal{U}(t)$ où $\mathcal{U}(t)$ est l'échelon de Heaviside, alors $U(p) = \frac{E}{p}$, d'où
 $V(p) = H(p) \times U(p) = KE \left[\frac{1}{p} - \frac{1}{p + \frac{1}{\tau}} \right] \Rightarrow \boxed{v(t) = KE[1 - e^{-t/\tau}]\mathcal{U}(t)}.$

3. Interprétation graphique (Fig. 15.9b) : après le régime transitoire exponentiel, la tension de sortie tend vers la valeur KE , atténuée par rapport à l'entrée E , due à l'effet du pont diviseur de tension créé par les deux résistances.

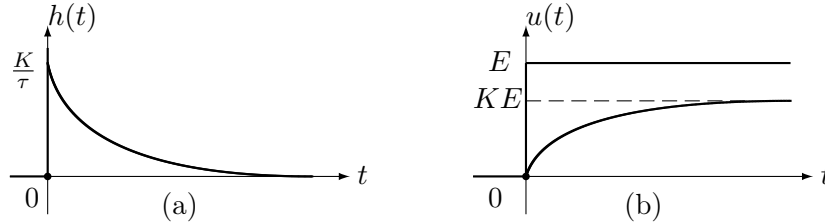


FIGURE 15.9 – Réponses du circuit : (a) impulsionnelle ; (b) indicielle.

15.47 Corrigé du 13.47 Peigne

1. On suppose que le signal $s(t)$ est de durée limitée T .

Le peigne est une somme de distributions de Dirac équi-espacées d'une période T_e : $\Pi(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e)$.

D'après les propriétés de l'impulsion de Dirac, on a :

$$s_p(t) = s(t) * \Pi(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(t) * \delta(t - nT_e) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(t - nT_e)$$

Donc $s_p(t)$ est le signal périodisé (le calcul a un intérêt ssi $T_e \geq T$).

$$s_e(t) = s(t) \cdot \Pi(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot \delta(t - nT_e) = \sum_{n=0}^{T/T_e} s(nT_e) \delta(t - nT_e)$$

Donc $s_e(t)$ est le signal échantillonné (le calcul a un intérêt ssi $T_e \ll T$).

2. La TL suppose des signaux causaux (nuls pour $t < 0$), donc on tronque $s_p(t)$: $S_p(p) = S(p) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} e^{-pnT_e}$. On reconnaît une série géométrique de raison $r = e^{-pT_e}$ qui converge vers $\frac{1}{1-r}$ ssi $|r| < 1$, soit si $\Re(p) > 0$ et alors :
 $S_p(p) = \frac{1}{1 - e^{-pT_e}} S(p)$

Par ailleurs : $S_e(p) = \sum_{n=0}^{T/T_e} s(nT_e)e^{-pnT_e}$. En posant $z = e^{pT_e}$, on reconnaît la TZ de $s(t)$, très utilisée pour les signaux numériques (échantillonnés).

15.48 Corrigé du 13.48 TL EDLCC

On sait que : $t^n e^{-at} \supset \frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$. Donc la transformation de Laplace donne, avec des conditions initiales nulles : $Y(p)[p^2 + 6p + 9] = \frac{2}{(p+3)^3} \Rightarrow$

$$Y(p) = \frac{2}{(p+3)^5} \Rightarrow \boxed{y(t) = \frac{1}{12}t^4 \exp(-3t)}$$

15.49 Corrigé du 13.49 Bode

Tracé des courbes de Bode de la fonction de transfert harmonique (coefficients réels) :

$$H(j\omega) = \frac{b_0 + b_1 j\omega}{a_0 + a_1 j\omega}$$

Soit la fonction de transfert de Laplace équivalente (en posant $p = j\omega$) :

$$H(p) = \frac{b_0 + b_1 p}{a_0 + a_1 p}$$

— cas No.0 : $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0$:

On pose le gain statique $K = \frac{b_0}{a_0}$; et les constantes de temps $\tau_1 = 1/\omega_1 = \left| \frac{b_1}{b_0} \right|$ et $\tau_0 = 1/\omega_0 = \left| \frac{a_1}{a_0} \right|$

$$H(j\omega) = \left(\frac{b_0}{a_0} \right) \frac{1 + \frac{b_1}{b_0} j\omega}{1 + \frac{a_1}{a_0} j\omega} = K \frac{1 \pm j \frac{\omega}{\omega_1}}{1 \pm j \frac{\omega}{\omega_0}}$$

$$H(p) = K \frac{1 \pm \tau_1 p}{1 \pm \tau_0 p}$$

— cas No.1 : $a_1 = 0, b_0 = 0$

$$H(p) = \pm \tau p$$

— cas No.2 : $a_1 = 0, b_1 \neq 0$

$$H(p) \propto 1 \pm \tau p$$

— cas No.3 : $a_0 = 0, b_1 = 0$

$$H(p) = \pm \frac{1}{\tau p}$$

— cas No.4 : $a_1 \neq 0$, $b_1 = 0$

$$H(p) \propto \frac{1}{1 \pm \tau p}$$

— cas No.5 : $a_1 = 0$, $b_1 = 0$

$$H(p) = K \text{ constante}$$

Les tracés asymptotiques se font sans calculs (4 courbes de base, cf. Figures de référence) :

$\pm \tau p$: gain croissant +20dB/décade et phase constante $\pm \frac{\pi}{2}$

$\pm 1/\tau p$: gain décroissant -20dB/décade et phase constante $\mp \frac{\pi}{2}$

$1 \pm \tau p$: gain variable de 0dB à +20dB/décade après ω_c et phase variable de 0 à $\pm \frac{\pi}{2}$

$1/(1 \pm \tau p)$: gain variable de 0dB à -20dB/décade après ω_c et phase variable de 0 à $\mp \frac{\pi}{2}$

15.50 Corrigé du 13.50 Ampli

1. Comme on a en pratique : $p = j\omega$, on peut écrire : $H_1(j\omega) = R \frac{1}{1+j\omega/\omega_c}$. Il s'agit d'un modèle de système passe-bas du 1^{er} ordre, dont la coupure a lieu pour la pulsation $\omega_c = 1000$, soit une fréquence $\nu_c = 160\text{Hz}$ (et alors : $|H_1|/R = 1/\sqrt{2} = -3\text{dB}$).

En basse fréquence (pour $p = j\omega \rightarrow 0$), la fonction H_1 tend vers R ; elle se comporte comme une résistance, indépendante de la fréquence (asymptote constante horizontale jusqu'à ω_c).

En haute fréquence (pour $\omega \rightarrow \infty$), la fonction équivaut à : $H_1 \approx \frac{1}{jC\omega} \rightarrow 0$ (soit $-\infty$ en dB), elle se comporte comme un condensateur. On a une asymptote oblique à partir de ω_c , de pente -20dB/décade.

Quant à la phase $\arg(H_1)$, elle vaut 0 en basse fréquence (pas de déphasage), et elle vaut $-90^\circ = -\pi/2$ en haute fréquence (retard de phase d'un condensateur).

D'où l'allure du diagramme de Bode du même type que sur la Fig. 13.17, p. 221.

2. On a :

$$H_2(j\omega) = R \cdot \frac{1 + j\frac{L}{R}\omega}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} = R \cdot \frac{1 + j\frac{1}{k^2}\frac{\omega}{\omega_c}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c} - \frac{1}{k^2}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}$$

On remarque qu'en basse fréquence ($\omega \rightarrow 0$) ou en haute fréquence ($\omega \rightarrow \infty$), cette fonction se comporte asymptotiquement comme H_1 : elle vaut soit R , soit $\frac{1}{jC\omega}$.

Cette fonction correspond à l'impédance totale d'un circuit électrique parallèle $Z = (R + L)/C$.

ω_c est la pulsation critique haute (coupure). ω_0 est la pulsation de résonance entre L et C . $k > 1$ est le rapport des pulsations.

3. Pour les courbes, cf. TP 14.7.2, p. 251

15.51 Corrigé du 13.51 Avance

S'agissant d'un système électronique, on pose : $p = j\omega$ où ω est la pulsation. Par ailleurs, on remarque que :

$$\frac{1}{R_1} > \frac{1}{R_0} \Rightarrow \omega_1 > \omega_0, \text{ et on note : } K = \frac{R_1}{R_0} = \frac{R}{R+R_0} < 1.$$

La loi du courant électrique justifie l'équation différentielle. En effet, le courant i dans R est la somme des courants i_0 et i_c circulant dans R_0 et C respectivement : $i = i_0 + i_c \Rightarrow$

$$\frac{v_s}{R} = \frac{v_e - v_s}{R_0} + C \frac{d(v_e - v_s)}{dt} \Rightarrow C \frac{dv_s}{dt} + v_s \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_0} \right) = C \frac{dv_e}{dt} + \frac{v_e}{R_0}$$

1. La fonction de transfert vaut :

$$H(p) = \frac{p + \frac{1}{R_0 C}}{p + \frac{1}{R_1 C}} = \frac{R_1}{R_0} \left[\frac{1 + \tau_0 p}{1 + \tau_1 p} \right] = K \left[\frac{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_1}} \right]$$

2. $H(p) = \frac{K}{1 + \tau_1 p} \times (1 + \tau_0 p)$ est le produit de 2 termes, d'où l'on a l'addition des courbes de gain en dB, et l'addition des courbes de phase pour les graphiques de Bode.
3. Le gain statique vaut : $G_0 = H(0) = R_1/R_0 = 1/10$ soit -20dB.
Le gain HF vaut : $G_\infty = H(\infty) \sim 1$ soit 0dB.
4. La phase est toujours positive ; son maximum vaut : $\Delta\Phi_{max} = +\pi/2$.
5. A.N. : $\omega_0 \approx 111$ et $\omega_1 \approx 1,1k$ (unité : rad/s).

Ce circuit est utile en automatique, comme correcteur à avance de phase.

15.52 Corrigé du 13.52 Piston

1. La combinaison des équations mécaniques donne :

$$r[y(t) - x(t)] + Bs \left[s \frac{dy}{dt} - S \frac{dx}{dt} \right] = 0.$$

En adoptant les paramètres : $a = S/s$ et $\tau = s^2 B/r$, on obtient l'équation

$$\text{différentielle régissant le système : } \boxed{y + \tau \frac{dy}{dt} = x + a\tau \frac{dx}{dt}}$$

2. Les **CI** étant nulles, on trouve :
$$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{1 + a\tau p}{1 + \tau p}$$
, où $a > 1$ et où τ est analogue à une constante de temps.
3. Posons $\omega_0 = \frac{1}{a\tau}$ et $\omega_1 = \frac{1}{\tau}$ avec $a = 7$. Alors :

$$H(p) = H(j\omega) = \frac{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_1}}$$
. En notant le dénominateur $Den = 1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2$, on trouve :
$$Re(\omega) = \frac{1}{Den} \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_0\omega_1}\right) = \frac{1 + a\tau^2\omega^2}{1 + \tau^2\omega^2}$$

et
$$Im(\omega) = \frac{\omega}{Den} \left(\frac{1}{\omega_0} - \frac{1}{\omega_1}\right) = \frac{(a-1)\tau\omega}{1 + \tau^2\omega^2}$$
4. $\omega = 0 \Rightarrow \begin{cases} Re(\omega) = 1 \\ Im(\omega) = 0 \end{cases}$ et $\omega \rightarrow \infty \Rightarrow \begin{cases} Re(\omega) \rightarrow a \\ Im(\omega) \rightarrow 0 \end{cases}$
5. $\tan \varphi = Im(\omega)/Re(\omega) > 0$ d'où $\varphi = \arctan \frac{(a-1)\tau\omega}{1 + a\tau^2\omega^2} \in [0; \frac{\pi}{2}[$. Donc la phase est positive $\forall \omega$. On peut montrer (recherche d'extremum par annulation de dérivée) qu'elle est maximale pour $\omega_M = \sqrt{\omega_0\omega_1} = \frac{1}{\tau\sqrt{a}}$ et qu'elle vaut alors : $\varphi_M = \arctan \sqrt{a} - \arctan(1/\sqrt{a}) = \arcsin \frac{a-1}{a+1}$.
6. Courbe de gain de Bode : voir exercice 13.51
7. Courbe de phase de Bode : idem voir 13.51
8. $X(p) = \frac{x_0}{p}$ donc $Y(p) = \frac{1+a\tau p}{1+\tau p} \cdot \frac{x_0}{p}$
la **DFRES** donne : $Y(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{1+\tau p}$ avec $A = \lim_{p \rightarrow 0} pY(p) = x_0$ et $B = \lim_{p \rightarrow -1/\tau} (1 + \tau p)Y(p) = \tau(a-1)x_0$
D'où : $Y(p) = \frac{x_0}{p} + \frac{x_0(a-1)}{p+1/\tau}$ La transformée inverse donne :

$$y(t) = x_0[1 + (a-1)e^{-t/\tau}]u(t)$$

On trouve : $y(0) = ax_0$ et $y(\infty) = x_0$.

A.N. : La courbe Fig. 15.10 illustre le comportement temporel du piston de sortie : il est d'abord éjecté instantanément d'une distance 7 fois supérieure au décalage d'entrée, puis revient à la position de décalage d'entrée selon la constante de temps τ .

9. Voir la solution de l'exercice 13.51. On trouve $H(p) = K \frac{1+a\tau p}{1+\tau p}$, avec :
 $K = \frac{R}{R_0+R} < 1$, $a = \frac{R_0+R}{R} > 1$, et une constante de temps électrique $\tau = (R_0//R)C$.

C'est le même type de fonction de transfert, donc le circuit électronique et le cylindre mécanique sont analogues du point de vue comportemental : ce sont tous deux des correcteurs à avance de phase, utilisés en automatique pour la régulation de système.

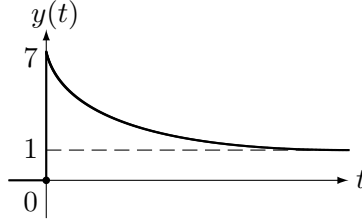


FIGURE 15.10 – Réponse du correcteur mécanique à piston.

15.53 Corrigé du 13.53 Porte

1. Appliquons la définition intégrale d'une TF :

$$\begin{aligned}
 S(\nu) &= TF[s(t) = A \cdot \Pi_T(t)] \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j2\pi\nu t} dt = A \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j2\pi\nu t} dt \\
 &= A \left[\frac{e^{-j2\pi\nu t}}{-j2\pi\nu} \right]_{-T/2}^{T/2} = \frac{A}{\pi\nu} \left[\frac{e^{j\pi\nu T} - e^{-j\pi\nu T}}{2j} \right] = \frac{A}{\pi\nu} \sin \pi\nu T \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$S(\nu) = AT \frac{\sin \pi\nu T}{\pi\nu T} = AT \operatorname{sinc}(\pi\nu T)$$

Remarques : le terme devant le sinus cardinal correspond à la surface de la porte ($A \times T$). Les zéros s'obtiennent pour : $S(\nu) = 0 \Rightarrow \pi\nu T = k\pi \Leftrightarrow$

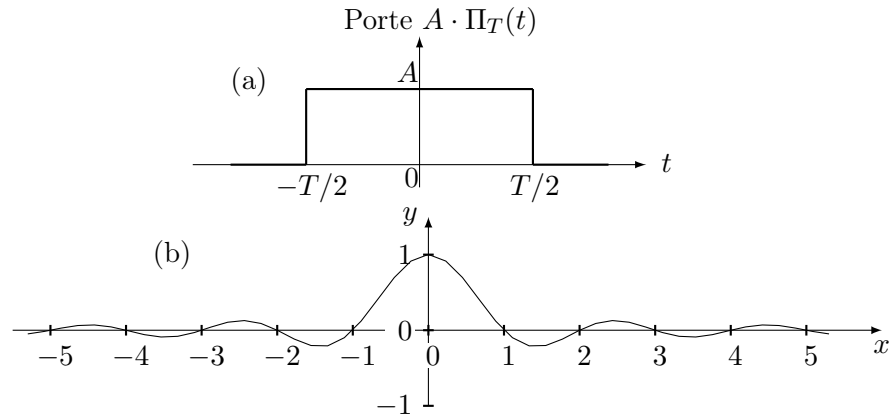
$$\nu = \frac{k}{T} \text{ pour } k \neq 0. \text{ Et en } \nu = 0, \text{ on a : } S(\nu) = AT.$$

2. La troncature temporelle d'un signal s'exprime mathématiquement comme la multiplication du signal par une porte d'amplitude unité et dont la largeur est la durée du signal : $s(t) \times \Pi_T(t)$.

Donc la TF d'un signal tronqué sera la convolution du spectre du signal par la TF de la porte, qui est un sinus cardinal : $S(\nu) * T \operatorname{sinc}(\pi\nu T)$.

On en conclut que la troncature temporelle se traduira pas un élargissement des raies spectrales (appelé phénomène de Gibbs ou fuite d'énergie). Cet inconvénient est inhérent à la durée finie de toute mesure de signal : on peut dire que c'est la traduction de notre finitude temporelle ! On perd forcément en précision spectrale (dégradation de la résolution fréquentielle). On ne peut s'en affranchir, mais on peut atténuer l'effet en utilisant des fenêtres de pondération adéquates, telles que Hanning, Hamming (très utilisée pour l'audio), ou Blackman ...

3. **Représentation graphique :** Fig. 15.11.

FIGURE 15.11 – a) Porte ; b) Spectre d'une porte (pour $A = 1$ et $T = 1$).

15.54 Corrigé du 13.54 Modulation

1. $s(t) = A_p \sin 2\pi f_p t + K A_p \sin 2\pi f_p t \cdot \sin 2\pi f_m t$.

Or : $\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a - b) - \cos(a + b)]$, donc :

$$s(t) = A_p \sin 2\pi f_p t + \frac{K A_p}{2} [\cos 2\pi(f_p - f_m)t - \cos 2\pi(f_p + f_m)t]$$

2. Le spectre du signal modulé en amplitude comportera donc trois fréquences : la porteuse f_p , et deux raies latérales $f_p - f_m$ et $f_p + f_m$. On peut exprimer $S(\nu)$ avec des pics de Dirac positionnés à ces fréquences.
3. La transformée d'une porte de largeur T est un sinus cardinal (Fig. 15.12). $TF[\Pi_T(t)] = T \frac{\sin \pi \nu T}{\pi \nu T} = T \text{sinc}(\pi \nu T)$, dont les zéros sont positionnés aux fréquences multiples de $1/T$: $\nu_k = \frac{k}{T}$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

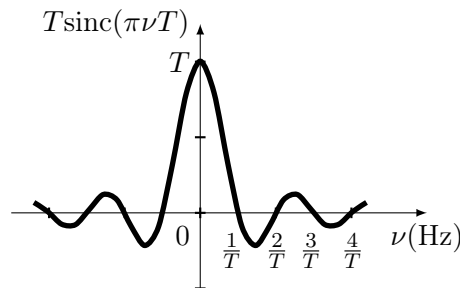


FIGURE 15.12 – Sinus cardinal.

4. La transformée s'obtient par convolution :

$$R(\nu) = TF[r(t)] = TF[s(t)] * TF[\text{porte}]$$

$$R(\nu) = T \frac{\sin \pi \nu T}{\pi \nu T} * A_p \left[\frac{\delta(\nu - f_p) - \delta(\nu + f_p)}{2i} + \frac{K}{2} \left(\frac{\delta(\nu - (f_p - f_m)) + \delta(\nu + (f_p - f_m))}{2} - \frac{\delta(\nu - (f_p + f_m)) + \delta(\nu + (f_p + f_m))}{2} \right) \right]$$

Chaque Dirac fréquentiel est donc convolué par le sinc.

5. Si T est grand, le spectre est représenté Fig. 15.13. Les sinc sont très resserrés autour de chaque fréquence ($1/T$ étant petit) et on distingue bien les différentes raies. En revanche, si T est court, les lobes principaux deviennent plus larges : on a un risque de chevauchement des raies (cf. largeur du lobe principal $= 2/T$).
6. Si l'on néglige les lobes secondaires, il faut, pour pouvoir séparer les raies : $f_p + \frac{1}{T} < f_p + f_m - \frac{1}{T} \Rightarrow f_m > \frac{2}{T} \Rightarrow T > \frac{2}{f_m}$ d'où $T_{min} = 2 \cdot T_m$, $T_m = 1/f_m$ étant la période du signal. Il faut au minimum 2 périodes du signal modulant BF : il faut donc une durée minimale de réception pour pouvoir décoder correctement le signal modulé transmis.

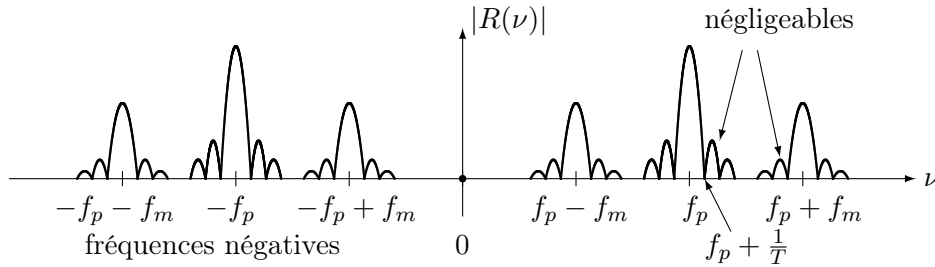


FIGURE 15.13 – Spectre d'un signal modulé en amplitude.

15.55 Corrigé du 13.55 Chaleur

$$\text{Posons } F(X, t) = TF[f(x, t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, t) e^{-i2\pi X x} dx.$$

1. la transformation de l'équation donne :

$$TF \left[a \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} \right] = TF \left[\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} \right] \Leftrightarrow a(i2\pi X)^2 F(X, t) = \frac{\partial F(X, t)}{\partial t}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{\partial F(X, t)}{\partial t} = -4\pi^2 X^2 a F(X, t)} \quad (15.7)$$

2. Posons $F_0(X) = TF[f_0(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, 0) e^{-i2\pi X x} dx = F(X, 0)$.

Intégrons l'équation (15.7) :

$$\int \frac{\partial F(X, t)}{F(X, t)} = - \int 4\pi^2 X^2 a dt \Rightarrow \ln F(X, t) = -4\pi^2 X^2 at + K(X)$$

où $K(X)$ est une constante au regard de la variable t .

$\Rightarrow F(X, t) = C(X) e^{-4\pi^2 X^2 at}$. Déterminons $C(X)$ en prenant la condition initiale $t = 0$: $F(X, 0) = C(X) = F_0(X)$ donc :

$$\boxed{F(X, t) = F_0(X) e^{-4\pi^2 X^2 at}}$$

3. Notons $G(X) = e^{-4\pi^2 X^2 at}$. Alors on a : $F(X, t) = F_0(X) \times G(X)$.

D'où, par transformation inverse :

$$f(x, t) = f_0(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_0(x - u) g(u) du$$

$$\text{où : } g(x) = TF^{-1}[G(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} G(X) e^{+i2\pi X x} dX$$

Pour éviter le calcul de $g(x)$, on peut utiliser deux règles de la TF : le changement d'échelle et la propriété de fonction propre de la gaussienne :

$$f(ax) \xleftrightarrow{TF} \frac{1}{|a|} F\left(\frac{X}{a}\right) \text{ et } e^{-\pi x^2} \xleftrightarrow{TF} e^{-\pi X^2}$$

Si l'on pose $b = \frac{1}{2\sqrt{\pi at}}$, on peut écrire : $G(X) = e^{-\pi\left(\frac{X}{b}\right)^2}$

Or $|b| e^{-\pi(bx)^2} \xleftrightarrow{TF} e^{-\pi\left(\frac{X}{b}\right)^2}$, donc :

$$\boxed{g(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi at}} e^{-\frac{x^2}{4at}}}$$

D'où :

$$f(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi at}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_0(x - u) e^{-\frac{u^2}{4at}} du$$

4. Le Dirac étant l'élément neutre de la convolution, on obtient alors : $f(x, t) = n_0 \delta(x) * g(x) = n_0 g(x)$. D'où :

$$\boxed{f(x, t) = \frac{n_0}{2\sqrt{\pi at}} e^{-\frac{x^2}{4at}}}$$

On obtient donc une fonction d'allure gaussienne selon la dimension x , ayant une variance $\propto t$ et une amplitude $\propto \frac{1}{\sqrt{t}}$. Voir Fig. 15.14.

5. Ce cas modélise l'action thermique de la pointe d'un fer à souder (très chaud, typ. 400°C) sur une piste de cuivre (initialement à température ambiante) : la diffusion de la température (idéalisée par un pic de Dirac initial) dans le barreau de cuivre suit une loi gaussienne dont l'amplitude s'atténue avec le temps et qui s'étale spatialement.

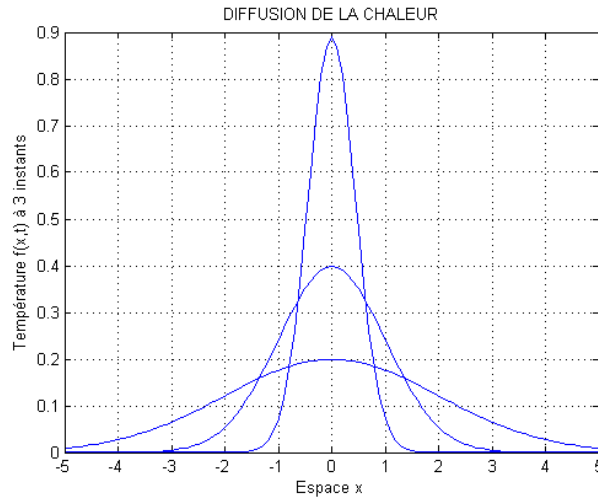


FIGURE 15.14 – Diffusion de la chaleur.

15.56 Corrigé du 13.56 Filtre numérique

1. Notons pour simplifier $b = 1 - a$.

Le schéma du circuit est présenté Fig. 15.15.

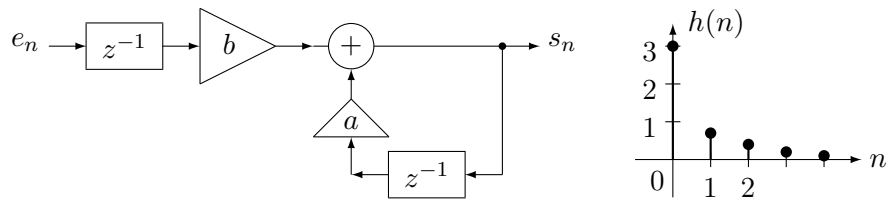


FIGURE 15.15 – Circuit numérique et sa réponse impulsionnelle.

$$2. S(z) = a \cdot z^{-1} S(z) + (1 - a) z^{-1} E(z) \Rightarrow H(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{(1-a)z^{-1}}{1-az^{-1}} = \frac{1-a}{z-a}$$

3. On peut réécrire : $\boxed{H(z) = (1-a)z^{-1} \frac{z}{z-a} \Rightarrow h(n) = (1-a)a^{n-1}}$

4. A.N. : $h(n) = \frac{3}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \frac{3}{4^n}$. Il s'agit d'un filtre stable (Fig. 15.15).

5. $S(z) + 5z^{-1}S(z) = z^{-2}E(z) + 3E(z) \Rightarrow H(z) = \frac{3+z^{-2}}{1+5z^{-1}} = \frac{3z+z^{-1}}{z+5}$.

On peut réécrire : $\boxed{H(z) = 3 \frac{z}{z-(-5)} + z^{-2} \cdot \frac{z}{z-(-5)}}$, or $\frac{z}{z-\alpha} \leftrightarrow \alpha^n$ donc :

$$h(n) = 3(-5)^n + (-5)^{n-2} = [3 + (-5)^{-2}](-5)^n$$

$$\Rightarrow \boxed{h(n) = \left(3 + \frac{1}{25}\right)(-1)^n 5^n}.$$

Son schéma de circuit et sa réponse impulsionnelle sont donnés Fig. 15.16. On constate que c'est un filtre instable puisque sa réponse diverge.

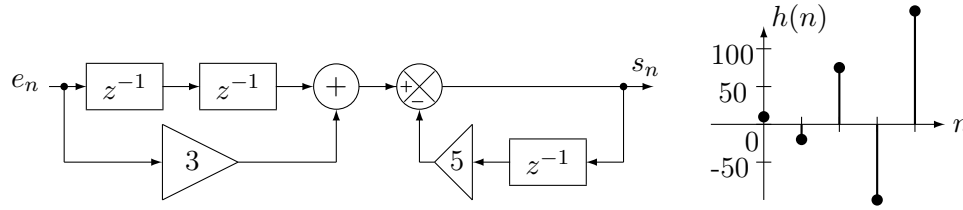


FIGURE 15.16 – Circuit numérique et allure de sa réponse instable.

15.57 Corrigé du 13.57 TZ

1. On a : $\cos \omega t = \frac{1}{2} (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})$, donc $Z[\cos \omega t] = \frac{1}{2} (Z[e^{j\omega t}] + Z[e^{-j\omega t}])$ or $\forall a \in \mathbb{C}, Z[e^{at}] = \frac{z}{z-e^{aT_e}}$, où T_e est la période d'échantillonnage. D'où :

$$Z[\cos \omega t] = \frac{1}{2} \left(\frac{z}{z-e^{j\omega T_e}} + \frac{z}{z-e^{-j\omega T_e}} \right) = \boxed{\frac{z(z - \cos \omega T_e)}{z^2 - 2z \cos(\omega T_e) + 1}}$$

Démonstration similaire pour : $\sin \omega t = \frac{1}{2j} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})$. On obtient :

$$\boxed{Z[\sin \omega t] = \frac{z \sin \omega T_e}{z^2 - 2z \cos(\omega T_e) + 1}}$$

2. On décompose la fraction : $\Phi(p) = -\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p+1}$. D'où l'on trouve la fonction temporelle originale : $f(t) = -1 + t + e^{-t}$. On en déduit :

$$F(z) = \frac{-z}{z-1} + \frac{T_e z}{(z-1)^2} + \frac{z}{z-e^{-T_e}}$$

En effet, on a notamment : $Z[1] = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$

3. Considérons la fonction accumulateur : $g(nT_e) = \sum_{k=0}^n f(kT_e)$. Appelons $G(z)$ sa transformée en Z. On peut écrire :

$$g(nT_e) = g[(n-1)T_e] + f(nT_e) \Rightarrow Z[g(nT_e)] = Z[g[(n-1)T_e]] + Z[f(nT_e)]$$

$$\Leftrightarrow G(z) = z^{-1}G(z) + F(z) \Rightarrow \boxed{G(z) = \frac{z}{z-1}F(z)}$$

N.B. : Une autre démonstration est possible en utilisant la propriété du produit de convolution en remarquant que $g = f_1 * f_2$ où $f_1 = f \rightarrow F(z)$ et $f_2 = 1 \rightarrow \frac{z}{z-1}$.

Ce résultat est important pour ses applications : il dit qu'une intégrale temporelle se traduit par une sommation en numérique.

4. La division permet d'obtenir les premiers termes de la récurrence :

$$\begin{array}{r|l} 3z^3 - 12z^2 + 11z + 0 & z^3 - 6z^2 + 11z - 6 \\ 6z^2 - 22z + 18 & 3 + 6z^{-1} + 14z^{-2} + 36z^{-3} + 98z^{-4} \end{array}$$

La décomposition permet d'obtenir l'équation de récurrence :

$$F(z) = z \left[\frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2} + \frac{C}{z-3} \right].$$

On calcule : $A = \left[(z-1) \frac{F(z)}{z} \right]_{z=1} = 1$. De même, on trouve : $B = C = 1$.

Donc :

$$F(z) = \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z-2} + \frac{z}{z-3} \Rightarrow f(t) = 1 + 2^{t/T_e} + 3^{t/T_e}$$

$$\Rightarrow \boxed{f(nT_e) = 1 + 2^n + 3^n} \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 3 \\ f(1) = 6 \\ f(2) = 14 \\ \dots \end{cases} \quad (\text{cf. Fig. 15.17}).$$

5. $F(z)$ comporte un pôle double : $z_0 = 1$, $n = 2$. On a :

$f(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = 0$. L'application du théorème des résidus donne :

$$f(nT_e) = \frac{1}{(2-1)!} \frac{d}{dz} \left[(z-1)^2 \frac{T_e z}{(z-1)^2} z^{n-1} \right] = \frac{d}{dz} [T_e z^n]_{z=1} = T_e [n z^{n-1}]_{z=1}$$

Donc $f(nT_e) = nT_e$, ce qui confirme la correspondance du Tab. 12.8, p. 182 : $f(t) = t \Leftrightarrow F(z) = T_e z / (z-1)^2$.

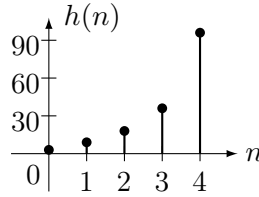


FIGURE 15.17 – Suite croissante des échantillons.

15.58 Corrigé du 13.58 Echantillonnage

Voir illustration Fig. 15.18.

1. On a $T_e = 0.5\text{s}$ soit $2T_e = 1$. Donc $s(t) = t + 1 \Leftrightarrow s(nT_e) = (n + 2)T_e$.

Notons $s_0(t) = t\mathcal{U}(t)$. Alors
$$S_0(z) = \frac{T_e z}{(z - 1)^2} = \frac{0.5z}{(z - 1)^2}.$$

$s_0(t + 2T_e) = s(t)$ et on a : $s_0(0) = 0$, $s_0(1) = \frac{1}{2}$, $s_0(2) = 1$, $s_0(3) = \frac{3}{2}$ etc.

2. On a : $s_1(t) = s_0(t + 2T_e)\mathcal{U}(t)$

$\Rightarrow S_1(z) = z^2[S_0(z) - s_0(0) - s_0(1)z^{-1}] = z^2S_0(z) - \frac{1}{2}z$, donc :

$$S_1(z) = \frac{0.5z^3}{(z - 1)^2} - 0.5z$$

3. $s_2(t) = (t + 2)\mathcal{U}(t) = s_0(t + 4T_e)\mathcal{U}(t)$

$\Rightarrow S_2(z) = z^4[S_0(z) - s_0(0) - s_0(1)z^{-1} - s_0(2)z^{-2} - s_0(3)z^{-3}]$, donc :

$$S_2(z) = \frac{z^5 T_e}{(z - 1)^2} - \frac{1}{2}z^3 - z^2 - \frac{3}{2}z$$

On enlève ainsi les contributions des impulsions en $-3T_e$, en $-2T_e$ et en $-T_e$, pour conserver une fonction causale.

4. $s_3(t) = t\mathcal{U}(t - 1) = s_0(t)\mathcal{U}(t - 1) = s_0(t)\mathcal{U}(t - 2T_e)$. On doit donc enlever les deux premiers échantillons : $S_3(z) = S_0(z) - [s_0(0) + s_0(1)z^{-1}] \Rightarrow$

$$S_3(z) = \frac{T_e z}{(z - 1)^2} - \frac{1}{2}z^{-1}$$

15.59 Corrigé du 13.59 TZ

1. Calcul de la transformée en Z :

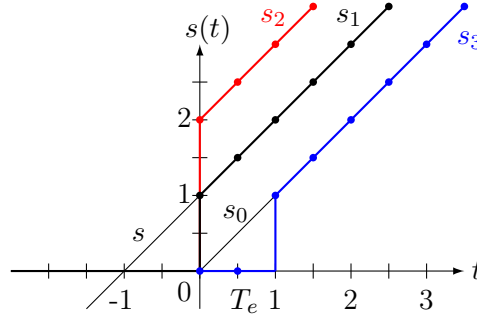


FIGURE 15.18 – Echantillonnage de signaux décalés.

$$\begin{aligned}
 U(z) - 3z[U(z) - u_0] + z^2[U(z) - u_0 - u_1 z^{-1}] &= 0 \Leftrightarrow \\
 U(z)[1 - 3z + z^2] &= -3zu_0 + z^2u_0 + zu_1 \Rightarrow U(z) = \frac{z[u_0 + u_1 - 3u_0]}{1 - 3z + z^2} \Rightarrow \\
 \boxed{U(z) = \frac{z(z-1)u_0}{z^2 - 3z + 1}}
 \end{aligned}$$

2. Identification avec les formules canoniques dans les tables de TZ :

$$\text{posons } 3 = 2\text{ch}\omega_0 T \Rightarrow \text{ch}\omega_0 T = \frac{3}{2} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{T} \text{Arch} \frac{3}{2}$$

Or : $\text{ch}^2\omega_0 T - \text{sh}^2\omega_0 T = 1 \Rightarrow \text{sh}\omega_0 T = \frac{\sqrt{5}}{2}$. D'où l'expression de $U(z)$:

$$\begin{aligned}
 U(z) &= \frac{u_0 z(z - \text{ch}\omega_0 T + \text{ch}\omega_0 T - 1)}{z^2 - z2\text{ch}\omega_0 T + 1} \\
 &= u_0 \left[\frac{z(z - \text{ch}\omega_0 T)}{z^2 - z2\text{ch}\omega_0 T + 1} + \frac{z\text{sh}\omega_0 T(\text{ch}\omega_0 T - 1)}{(z^2 - z2\text{ch}\omega_0 T + 1)\text{sh}\omega_0 T} \right] \\
 U(z) &= u_0 \left[\frac{z(z - \text{ch}\omega_0 T)}{z^2 - z2\text{ch}\omega_0 T + 1} + \frac{(\frac{3}{2} - 1)}{\frac{\sqrt{5}}{2}} \frac{z\text{sh}\omega_0 T}{z^2 - z2\text{ch}\omega_0 T + 1} \right]
 \end{aligned}$$

3. Retour à l'original :

$$\boxed{u_n = u_0 \left[\text{ch}\omega_0 n + \frac{1}{\sqrt{5}} \text{sh}\omega_0 n \right]}$$

15.60 Corrigé du 13.60 Transformée de Laplace

1.

$$h(t) = \frac{1}{\tau_0 - \tau_1} \left[e^{-t/\tau_0} - e^{-t/\tau_1} \right]$$

2. Additions des courbes de Bode (Fig. 15.19a) : on observe 2 transitions : à ω_0 et $\omega_1 = 10\omega_0$; on obtient 3 pentes : 0dB/décade, puis -20dB/décade, puis -40dB/décade ; le gain statique vaut : 0dB.

3. On obtient un 2^e ordre :

$$H_2(p) = \frac{1}{1 + 2\zeta\tau p + \tau^2 p^2}$$

4. $\zeta = 1$

5. Une seule transition à ω_0 ; cf. Fig. 15.19b ;

Deux pentes : d'abord 0dB puis -40dB/décade

6. -6dB

7. $\omega_c = \omega_0 \sqrt{\sqrt{2} - 1} = 0.65\omega_0$

8. Passe-bas du 2^e ordre

9. Forte atténuation (d'environ -30dB) et déphasage proche de $-\pi$.

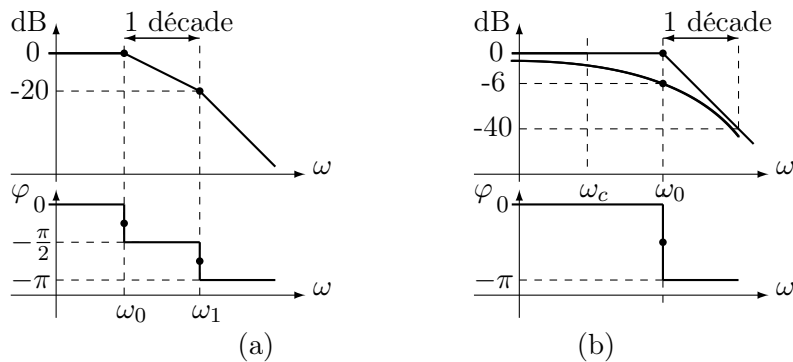


FIGURE 15.19 – Courbes asymptotiques de Bode.

15.61 Corrigé du 13.61 Transformée de Fourier

1. $h(t) = \frac{1}{RC} e^{-t/RC}$: décroissance exponentielle

2. évident : $\tau = RC$

3. $\nu_c = \frac{1}{2\pi RC}$

4.

$$|H| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\nu}{\nu_c}\right)^2}} \quad \arg(H) = -\arctan\left(\frac{\nu}{\nu_c}\right) \quad (15.8)$$

5. cf. cours : $E(\nu) = \frac{A}{2} [\delta(\nu - \nu_0) + \delta(\nu + \nu_0)]$

6.

$$H_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\nu_0}{\nu_c}\right)^2}} \quad \Phi_0 = -\arctan\left(\frac{\nu_0}{\nu_c}\right) \quad (15.9)$$

7. $S(\nu) = H(\nu)E(\nu) = \frac{AH_0}{2} [e^{j\Phi_0}\delta(\nu - \nu_0) + e^{-j\Phi_0}\delta(\nu + \nu_0)]$
8. calcul de la TF inverse :
 $s(t) = TF^{-1}[S(\nu)] = \frac{AH_0}{2} [e^{j\Phi_0}e^{j2\pi\nu_0 t} + e^{-j\Phi_0}e^{-j2\pi\nu_0 t}]$
9. en **BF** : $s(t) \approx e(t)$
 en **HF** : $s(t) \rightarrow 0$ avec $\Phi \rightarrow -\pi/2$
10. déphasage \Leftrightarrow Retard temporel
 qd ν augmente : Amplitude de + en + atténuée et signal de + en + retardé
11. $\nu_c \leq \frac{\varepsilon\nu_0}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \approx \varepsilon\nu_0$
A.N. : $\nu_c = 10\text{Hz}$.

15.62 Corrigé du 13.62 Transformée en Z

1. On a : $H(z) = 4 \left[\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-\frac{1}{2}} \right]$. D'où l'original : $h(n) = 4 \left(1 - \frac{1}{2^n} \right)$
2. croissance exponentielle de 0 à 4 (Fig. 15.20a)
3. $H(z) = \frac{S(z)}{E(z)} \Rightarrow S(z) \left[z^2 - \frac{3}{2}z + \frac{1}{2} \right] = 2zE(z)$. En multipliant par z^{-2} , et en prenant la transformée inverse, on obtient : $s_n = 2e_{n-1} + \frac{3}{2}s_{n-1} - \frac{1}{2}s_{n-2}$
4. circuit (Fig. 15.20b) : 3 retards purs, 3 multiplieurs par une constante, un additionneur à 3 entrées.
5. filtre instable ($|h(t)|$ n'est pas intégrable)
6. aucun intérêt en filtrage!

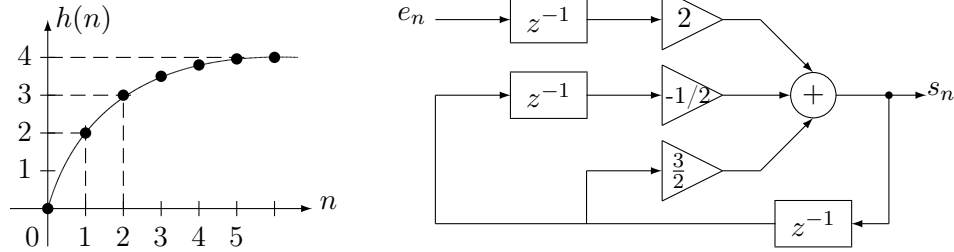


FIGURE 15.20 – (a) Suite d'échantillons ; (b) Circuit numérique.

15.63 Corrigé du 13.63 TL Filtre 2^e ordre

$$1. H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{b}{p^2 + 2ap + a^2 + b^2} = \boxed{\frac{b}{(p+a)^2 + b^2}}$$

2. $h(t) = e^{-at} \sin bt$
3. $a \approx 0.35$ et $b \approx 0.79$. On calcule la fréquence ν_0 et la période T_0 du signal :
 $b = 2\pi\nu_0 \Rightarrow \nu_0 = 1/8 \Rightarrow T_0 = 8$
 Voir le graphe du signal de la réponse impulsionnelle : Fig. 15.21a.
4. Oui, car les pôles sont à partie réelle < 0 : $p_0 = -a \pm jb$
5. On a : $K = \frac{b}{a^2 + b^2}$ qui représente le gain statique ; $\tau^2 = \frac{1}{a^2 + b^2}$ et $2\zeta\tau = \frac{2a}{a^2 + b^2}$ donc la constante de temps vaut : $\tau = 1/\sqrt{a^2 + b^2}$ et l'amortissement : $\zeta = a/\sqrt{a^2 + b^2}$
6. $\omega_n = 1/\tau = \sqrt{a^2 + b^2}$ et :

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 + 2\zeta j \frac{\omega}{\omega_n} - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

7. $\zeta = 0.4$, $\omega_n = 0.86$, $\tau = 1.16$, $K = 1.36$.
8. La surtension vaut : $Q \approx 3dB$ (résonance à la pulsation ω_r).
 Voir les courbes de Bode (gain et phase) sur la Fig. 15.21b.

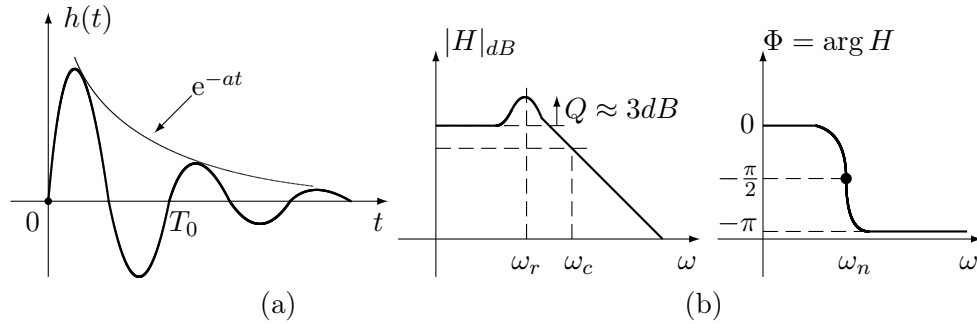


FIGURE 15.21 – (a) Réponse impulsionnelle ; (b) Courbes de Bode.

15.64 Corrigé du 13.64 TZ

1. $h(t) = e^{-at} \sin bt$ donc :

$$H(z) = \frac{ze^{-aT_e} \sin bT_e}{z^2 - 2ze^{-aT_e} \cos bT_e + e^{-2aT_e}}$$

2. Or : $e^{-a} \sin b = e^{-a} \cos b = e^{-2a} = \frac{1}{2}$ (car $b = \frac{\pi}{4}$ et $2a = \ln 2$). Donc :

$$H(z) = \frac{\frac{1}{2}z}{z^2 - z + \frac{1}{2}}$$

3. $Y(z)[2 - 2z^{-1} + z^{-2}] = z^{-1}X(z) \Rightarrow 2y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2} = x_{n-1}$

4.
$$y_n = y_{n-1} - \frac{1}{2}y_{n-2} + \frac{1}{2}x_{n-1}$$

5.

$$[y_0 \ y_1 \ \cdots \ y_{12}] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{-1}{8} & \frac{-1}{8} & \frac{-1}{16} & 0 & \frac{1}{32} & \frac{1}{32} & \frac{1}{64} & 0 \end{bmatrix}$$

6. Cette réponse $y(n)$ est une sinusoïde amortie échantillonnée. Fig. 15.22.

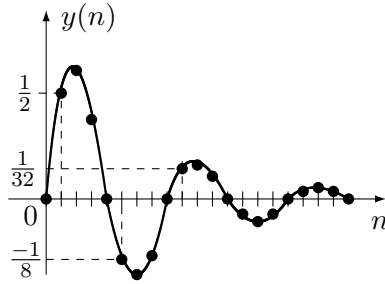


FIGURE 15.22 – Allure de la réponse échantillonnée.

15.65 Corrigé du 13.65 TL

1. $f_1(t) = \frac{1}{2}[\sin(5t) + \sin t] \Rightarrow F_1(p) = \frac{1}{2} \left[\frac{5}{p^2+25} + \frac{1}{p^2+1} \right]$

2. on utilise la règle $t^2 f(t) \supset F^{(2)}(p) \Rightarrow F_2(p) = \frac{d^2}{dp^2} \left[\frac{\omega}{p^2+\omega^2} \right]$

3. $f_3(t) = 1 - \sin(2t) \Rightarrow F_3(p) = \frac{1}{p} - \frac{2}{p^2+4} = \frac{p^2-2p+4}{p(p^2+4)}$

4. $F_4(p) = \frac{6}{p^4} e^{-2p}$

15.66 Corrigé du 13.66 Original

$$g(t) = e^{-at} \left[A \cos(bt) + \frac{B - Aa}{b} \sin(bt) \right]$$

15.67 Corrigé du 13.67 Périodique

1. La période vaut : $T = 4$
2. Le graphe de $m(t)$ se superpose à $f(t)$ entre 0 et 4, et avec l'axe horizontal partout ailleurs hors de l'intervalle $[0; 4]$.
3. L'échelon unité de Heaviside $\mathcal{U}(t)$ joue en quelque sorte le rôle d'un interrupteur pour démarrer (ou arrêter) une fonction élémentaire à un instant donné, permettant ainsi de construire la fonction linéaire par morceaux $m(t)$:

$$m(t) = 2t\mathcal{U}(t) - 2(t-1)\mathcal{U}(t-1) - 4\mathcal{U}(t-2) + 2(t-3)\mathcal{U}(t-3) - 2(t-4)\mathcal{U}(t-4)$$
4. $M(p) = \frac{2}{p^2}(1 - e^{-p} + e^{-3p} - e^{-4p}) - \frac{4}{p}e^{-2p}$
5. La règle de translation de la variable concrète donne :

$$F(p) = \sum_k M(p)e^{-kpT} = M(p) \sum_k e^{-kpT}$$

6. On a affaire à la somme d'une série géométrique de raison $r = e^{-pT}$. Pour $|r| < 1$ (c'est-à-dire si $\Re(p) > 0$), on obtient (cf. exercice 13.88) :

$$F(p) = \frac{M(p)}{1 - e^{-pT}} = \frac{M(p)}{1 - e^{-4p}}$$

7. La fonction $f(t)$ de période $T = 4$ est impaire sans composante continue, donc $\forall k, a_k = 0$ et seuls les b_k sont à calculer :

$$b_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin\left(k \frac{2\pi}{T} t\right) dt = \int_0^2 f(t) \sin\left(k \frac{\pi}{2} t\right) dt$$

Comme : $\begin{cases} f(t) = 2t & \text{pour } t \in [0; 1] \\ f(t) = 2 & \text{pour } t \in [1; 2] \end{cases}$, on découpe l'intervalle d'intégration :

$$b_k = 2 \int_0^1 t \sin\left(k \frac{\pi}{2} t\right) dt + 2 \int_1^2 \sin\left(k \frac{\pi}{2} t\right) dt$$

En utilisant l'intégration par parties pour la première intégrale, on trouve :

$$b_k = \frac{4}{k\pi} \left[\frac{2}{k\pi} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) - (-1)^k \right].$$

D'où finalement :

$$b_{2n} = -\frac{2}{n\pi} \text{ et } b_{2n+1} = \frac{4}{(2n+1)\pi} \left[\frac{2}{(2n+1)\pi} (-1)^n + 1 \right]$$

15.68 Corrigé du 13.68 TF Passe-bas

1. $H(\nu) = TF[h(t)] = \frac{1}{1+j2\pi\tau\nu} = \frac{1}{1+j\nu/\nu_0}$ et
 $E(\nu) = TF[e(t)] = \frac{A}{2}[\delta(\nu - \nu_1) + \delta(\nu + \nu_1)]$

2.

$$H(\nu) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^2}} e^{j \arctan\left(-\frac{\nu}{\nu_0}\right)}$$

3. $S(\nu) = E(\nu) \times H(\nu)$ or $\delta(x - a)f(x) = \delta(x - a)f(a)$ donc :

$$S(\nu) = \underbrace{\frac{A}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\nu_1}{\nu_0}\right)^2}}}_{\text{atténuation}} \left[\underbrace{\delta(\nu - \nu_1) e^{j \arctan\left(-\frac{\nu_1}{\nu_0}\right)}}_{\text{déphasage}} + \delta(\nu + \nu_1) e^{j \arctan\left(\frac{\nu_1}{\nu_0}\right)} \right]$$

4. Le signal de sortie est donc de même fréquence ν_1 , mais déphasé, et son amplitude est atténuée d'un facteur environ 300 \Rightarrow filtrage du 50 Hz.

15.69 Corrigé du 13.69 SE

1. C'est une série entière de coefficient $a_n = (n + 1)$;
calculons $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \left| \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{x^{n+1}}{x^n} \right| = \left| \frac{n+2}{n+1} \right| \cdot |x| \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = |x|$.
La série converge ssi : $|x| < 1$
2. Le rayon de convergence vaut donc : $R = 1$
3. u_n est la dérivée du terme $v_n = x^{n+1}$, terme d'une série géométrique de raison x . Or pour $|x| < 1$, on obtient : $\sum_0^\infty v_n = \frac{x}{1-x}$.

$$\text{Donc } S = \sum_0^\infty u_n = \sum_0^\infty v'_n \stackrel{C.U.}{=} \left(\sum_0^\infty v_n \right)' \text{ d'où } \boxed{S = \left(\frac{x}{1-x} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2}}$$

15.70 Corrigé du 13.70 DSF

1. La Fig. 15.23 montre le signal sur sa période de base : $T = 2L$. La pulsation correspondante vaut : $\omega = \pi/L$.
2. La fonction est impaire donc : $\forall k \in \mathbb{N}, a_k = 0$, et $b_k = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \sin k\omega t dt$

$$b_k = \frac{2A}{L} \int_0^{L/2} \sin k\omega t dt = \frac{2A}{k\omega L} [-\cos k\omega t]_0^{L/2} \Rightarrow \boxed{b_k = \frac{2A}{k\pi} \left[1 - \cos \frac{k\pi}{2} \right]}$$

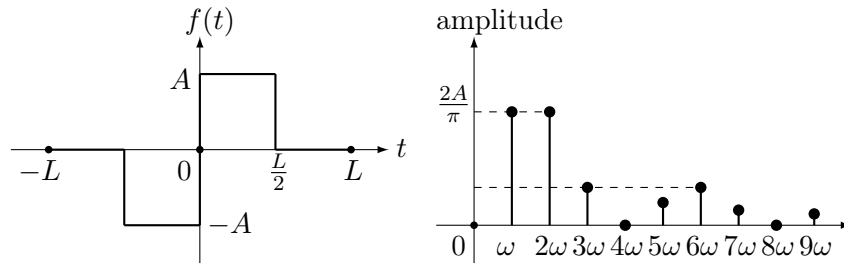


FIGURE 15.23 – Signal périodique et son spectre de Fourier.

3. Pour k impair : $\cos \frac{k\pi}{2} = 0$. Pour $k = 2n$ pair : $\cos \frac{k\pi}{2} = \cos n\pi = (-1)^n$

$$\text{Donc : } f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_{2n+1} \sin(2n+1)\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} \sin 2n\omega t$$

$$f(t) = \frac{2A}{\pi} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\omega t}{2n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{2n} \sin 2n\omega t \right]$$

4. Voir Fig. 15.23. Il n'y a pas d'harmonique en 4ω , ni en 8ω .

$$f(t) = \frac{2A}{\pi} \left[\sin \omega t + \sin 2\omega t + \frac{\sin 3\omega t}{3} + \frac{\sin 5\omega t}{5} + \frac{\sin 6\omega t}{3} + \frac{\sin 7\omega t}{7} + \dots \right]$$

15.71 Corrigé du 13.71 EDLCC14

1. $[p^2 Y(p) - p y_0 - y'_0] - [p Y(p) - y_0] - 2Y(p) = TL[te^t] \Rightarrow$

$$Y(p)[p^2 - p - 2] - p + 1 = \frac{1}{(p-1)^2} \Rightarrow Y(p) = \frac{p^3 - 3p^2 + 3p}{(p-1)^2(p+1)(p-2)}$$

La décomposition en éléments simples donne :

$$Y(p) = \frac{A}{(p-1)^2} + \frac{B}{p-1} + \frac{C}{p+1} + \frac{D}{p-2}$$

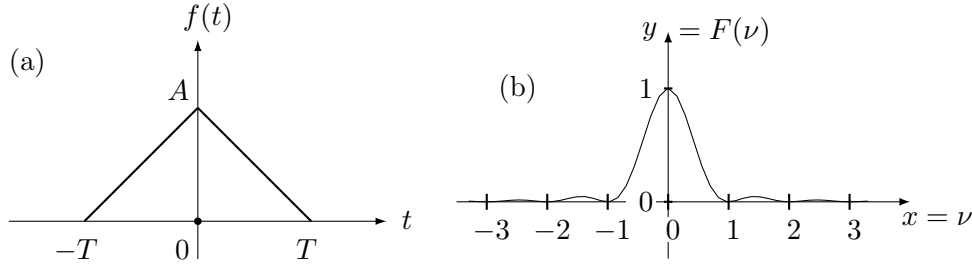
2. D'où : $y(t) = Ate^t + Be^t + Ce^{-t} + De^{2t}$

$$y(t) = -\frac{1}{2}te^t - \frac{1}{4}e^t + \frac{7}{12}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{2t}$$

15.72 Corrigé du 13.72 TF Triangle

1. voir Fig. 15.24.
2. La fonction est paire : $f(-t) = f(t)$. Donc on découpe l'intervalle et on utilise le changement de variable $u = -t$:

$$F(\nu) = \int_{-T}^T f(t) e^{-i2\pi\nu t} dt = \int_{-T}^0 f(t) e^{-i2\pi\nu t} dt + \int_0^T f(t) e^{-i2\pi\nu t} dt$$

FIGURE 15.24 – Triangle et sa transformée de Fourier (pour $A = 1$ et $T = 1$).

$$\underbrace{=}_{u=-t} 2 \int_0^T f(t) \cos(2\pi\nu t) dt = \dots = AT \operatorname{sinc}^2(\pi\nu T)$$

3. Autre démonstration possible en utilisant les tables :

$$\bigwedge_T(t) \leftrightarrow (T/2) \operatorname{sinc}^2(\pi\nu T/2)$$

et la règle de changement d'échelle : $f(t/a) \leftrightarrow aF(a\nu)$ avec $a = 2$.

$$f(t) = A \bigwedge_T(t/2)$$

15.73 Corrigé du 13.73 Alternance positive

1. Rappels : $\omega T = 2\pi$; $2 \sin a \cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b)$; $\sin k\pi = 0$ et $\cos k\pi = (-1)^k$. On calcule alors sans difficulté :

$$a_0 = A/\pi ; a_k = \frac{A}{\pi} \frac{1}{k^2-1} [(-1)^{k-1} - 1] \Rightarrow a_{2n+1} = 0.$$

Pour $k \neq 1$, on trouve : $b_k = \frac{A}{\omega T} \left[\frac{\sin((1-k)\pi)}{1-k} - \frac{\sin((k+1)\pi)}{k+1} \right] = 0$, alors que pour $k = 1$, on trouve : $b_1 = A/2$. D'où le DSF de l'Eq. 13.26.

2. Le DSF comporte : la composante continue (terme constant qui est la valeur moyenne), la fréquence fondamentale (pulsation ω_0), et les harmoniques pairs (pulsations $2n\omega_0$) dont l'amplitude décroît en $\sim 1/n^2$.

3. La représentation graphique est triviale (spectre de raies).

15.74 Corrigé du 13.74 Reconstitution par TFD

1. Notons pour simplifier : $\nu_n = 2n\nu_0$. Alors :

$$S(\nu) = \frac{A}{\pi} \delta(\nu) + \frac{A}{2} \left[\frac{\delta(\nu-\nu_0)-\delta(\nu+\nu_0)}{2i} \right] - \frac{2A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta(\nu-\nu_n)+\delta(\nu+\nu_n)}{2(4n^2-1)}$$

2. On obtient un spectre infini de raies d'amplitude décroissant rapidement.

$$3. V(\nu) = S(\nu) * F_e \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu - nF_e) = F_e \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(\nu - nF_e)$$

4. On obtient la reproduction du spectre $S(\nu)$ périodisé tous les F_e .
5. Non, car $\nu_{max} = \infty$, donc on ne peut pas en toute rigueur respecter le théorème de Shannon.
6. $\text{Energie} = V_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{T} \int_{[T]} s^2(t) dt = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)$ (d'après le théorème de Bessel-Parseval). Ici, on a simplement : $V_{\text{eff}}^2 = a_0^2 + b_1^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}^2$. Il faut donc que l'amplitude de l'harmonique de rang $k = 2n$ vérifie : $a_k^2 < \frac{b_1^2}{100}$, soit $a_{2n} < \frac{b_1}{10} = \frac{A}{20}$.
7. On trouve : $n = 2$, donc l'harmonique $k = 4$ est négligeable.
L'erreur vaut : $\epsilon = \frac{2A}{15\pi} = 0.04A$.
8. La somme des cosinus est limitée aux deux premiers termes, donc $S_b(\nu)$ ne contient plus un spectre infini de raies, mais s'arrête à l'harmonique $k = 4$, soit la fréquence $4\nu_0$.
$$V_b(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_b(\nu - nF_e)$$
9. Le théorème de Shannon stipule que : $F_e \geq 2\nu_{max}$, or ici $\nu_{max} = 4\nu_0$.
10. Il faut éliminer l'harmonique $4\nu_0$ et ne pas atténuer l'harmonique $2\nu_0$. Il faut donc couper entre $2\nu_0$ et $4\nu_0$: $2\nu_0 < \nu_c < 4\nu_0 \Rightarrow \nu_c = 3\nu_0$.
N.B. : S'agissant d'un filtre du 1^{er} ordre, on sait qu'on a une atténuation de -20dB (=1/10) en $10\nu_c$.
En théorie, on prend : $F_e \geq 2\nu_{max}$. Donc pour $\nu_c = 3\nu_0 = \nu_{max}$, on a : $F_{e_{min}} = 6\nu_0$. (En pratique, on prendra plutôt $F_e \geq 20\nu_c$).

15.75 Corrigé du 13.75 RL

1. L'équation transformée est : $E(p) = R.I(p) + L[pI(p) - i(0)]$, donc :
$$I(p) = \frac{E(p)}{R + Lp}$$
2. D'après les tables de transformées : $E(p) = \frac{1}{p^2}$
3. D'où : $I(p) = \frac{1}{p^2(R + Lp)}$. Selon la technique de calcul de DFRES, les coefficients valent : $B = p^2 I(p)]_{p=0} = 1/R$; $C = (R + Lp)I(p)]_{p=-R/L} = (L/R)^2$; A s'en déduit, en prenant par exemple la valeur particulière pour $p = 1$: $A + B = (1 - C)/(R + L) = -L/R^2$.
4. $i(t) = A\mathcal{U}(t) + B.t\mathcal{U}(t) + \frac{C}{L}e^{-\frac{R}{L}t}\mathcal{U}(t) \Rightarrow i(t) = \frac{1}{R} \left[t - \tau(1 - e^{-t/\tau}) \right] \mathcal{U}(t)$

5. La constante de temps vaut : $\tau = L/R = 50ns$.
6. On observe un traînage de la réponse en courant, du même type que celui représenté en Fig. 15.33b, p. 329.

15.76 Corrigé du 13.76 Alternance négative

1. $T_0 = 10$; $f_0 = 1/T_0 = 0.1$; $\omega_0 = 2\pi f_0 = 0.63$ et $A_0 = 2$.
2. N.B. : $\omega_0 T_0 = 2\pi$ et $\cos k\pi = (-1)^k$.

$$s(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t \in [0; T_0/2] \\ A_0 \sin \omega_0 t & \text{pour } t \in [T_0/2; T_0] \end{cases}$$

$$3. a_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} s(t) dt = \frac{A_0}{T_0} \int_{T_0/2}^{T_0} \sin \omega_0 t dt = \frac{A_0}{T_0} \left[-\frac{\cos \omega_0 t}{\omega_0} \right]_{T_0/2}^{T_0}$$

$$\Rightarrow a_0 = -\frac{A_0}{\pi} \approx -0.64$$

$$4. a_1 = \frac{2A_0}{T_0} \int_{T_0/2}^{T_0} \sin \omega_0 t \cos \omega_0 t dt = \frac{A_0}{T_0} \int_{T_0/2}^{T_0} \sin 2\omega_0 t dt = \frac{A_0}{T_0} \left[-\frac{\cos 2\omega_0 t}{2\omega_0} \right]_{T_0/2}^{T_0}$$

$$\Rightarrow a_1 = 0$$

$$5. \text{ Pour } k > 1, a_k \stackrel{\text{déf.}}{=} \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} s(t) \cos(k\omega_0 t) dt = \frac{2A_0}{T_0} \int_{T_0/2}^{T_0} \sin \omega_0 t \cos k\omega_0 t dt, \text{ or :}$$

$$2 \sin a \cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b), \text{ donc :}$$

$$a_k = \frac{A_0}{T_0} \int_{T_0/2}^{T_0} [\sin(1+k)\omega_0 t + \sin(1-k)\omega_0 t] dt$$

$$\text{Pour } k \neq 1, a_k = \frac{A_0}{T_0} \left(\left[\frac{-\cos(k+1)\omega_0 t}{(k+1)\omega_0} \right]_{T_0/2}^{T_0} + \left[\frac{\cos(k-1)\omega_0 t}{(k-1)\omega_0} \right]_{T_0/2}^{T_0} \right)$$

$$\Rightarrow a_k = \frac{A_0}{\pi} \frac{1+(-1)^k}{(k+1)(k-1)} \Rightarrow \begin{cases} a_{2n+1} &= 0 \\ a_{2n} &= \frac{A_0}{\pi} \cdot \frac{2}{4n^2-1} \end{cases}$$

$$6. b_1 = \frac{2A_0}{T_0} \int_{T_0/2}^{T_0} \sin \omega_0 t \sin \omega_0 t dt, \text{ or : } 2 \sin^2 \theta = 1 - \cos 2\theta, \text{ donc :}$$

$$b_1 = \frac{A_0}{T_0} \int_{T_0/2}^{T_0} (1 - \cos 2\omega_0 t) dt = \frac{A_0}{T_0} \left[t - \frac{\sin 2\omega_0 t}{2\omega_0} \right]_{T_0/2}^{T_0} \Rightarrow b_1 = \frac{A_0}{2}$$

$$7. \text{ Pour } k > 1, b_k \stackrel{\text{déf.}}{=} \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} s(t) \sin(k\omega_0 t) dt = \frac{2A_0}{T_0} \int_{T_0/2}^{T_0} \sin \omega_0 t \sin k\omega_0 t dt, \text{ or :}$$

$$2 \sin a \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b) \Rightarrow \forall n \neq 1, b_n = 0$$

8. Donc le DSF du signal à alternances négatives vaut :

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} \cos(2n\omega_0 t) + b_1 \sin \omega_0 t, \text{ soit :}$$

$$s(t) = A_0 \left[-\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin \omega_0 t + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} \cos 2n\omega_0 t \right]$$

9. Graphe : voir Fig. 15.25.

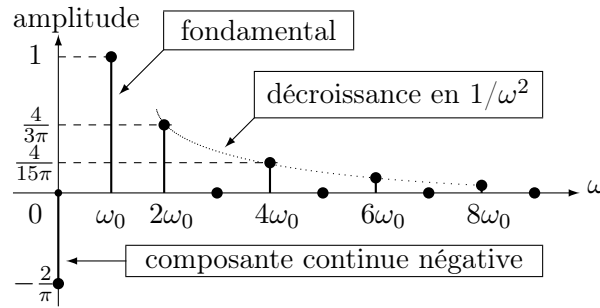


FIGURE 15.25 – Fréquences d'un signal mono-alternance négatif.

10. Commentaires : le fondamental correspond à la pulsation ω_0 ; la valeur moyenne est négative ; seuls les harmoniques pairs sont présents ; leur amplitude subit une décroissance rapide en $1/n^2$.

15.77 Corrigé du 13.77 TL RL série

$$E(p) = R.I(p) + L[pI(p) - i(0)] = (R + Lp)I(p) \Rightarrow I(p) = \frac{E(p)}{R + Lp} = \frac{1}{L} \cdot \frac{E(p)}{p + \frac{R}{L}}.$$

On peut poser : $\tau = L/R$, qui est la constante de temps du circuit.

$$1. E(p) = \frac{A}{p} \Rightarrow I(p) = \frac{A}{L} \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{p + \frac{1}{\tau}} \stackrel{\text{DFRES}}{=} \frac{A}{R} \left[\frac{1}{p} - \frac{1}{p + 1/\tau} \right]$$

$$\Rightarrow i(t) = \frac{A}{R} \left[1 - e^{-t/\tau} \right] \mathcal{U}(t)$$

$$2. E(p) = \frac{\alpha}{p^2} \Rightarrow I(p) = \frac{\alpha}{L} \cdot \frac{1}{p^2} \cdot \frac{1}{p + \frac{1}{\tau}} \stackrel{\text{DFRES}}{=} \frac{\alpha}{R} \left[\frac{1}{p^2} - \frac{\tau}{p} + \frac{\tau}{p + 1/\tau} \right]$$

$$\Rightarrow i(t) = \frac{\alpha}{R} \left[t - \tau(1 - e^{-t/\tau}) \right] \mathcal{U}(t)$$

3. On obtient les 2 courbes de réponse du même type que celles de la Fig. 15.33, p. 329.

4. N.B. : Quand $t \rightarrow \infty$, on a une droite asymptote : $i(t) \approx \frac{\alpha}{R}(t - \tau)$. Le paramètre τ correspond à un retard presque pur (phénomène de «traînage»).

15.78 Corrigé du 13.78 Expo décroissante

1. Notons $g(t) = e^{-t/\tau} \mathcal{U}(t)$. Alors $f(t)$ est retardée de t_0 par rapport à $g(t)$:

$$f(t) = g(t - t_0) = e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} \cdot \mathcal{U}(t - t_0)$$

2. D'après les tables, on sait que : $e^{-t/\tau} \mathcal{U}(t) \xrightarrow{TF} \frac{1}{1+j2\pi\nu}$. La règle du changement d'échelle donne :

$$g(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} \mathcal{U}(t) \xrightarrow{TF} G(\nu) = |\tau| \cdot \frac{1}{1+j2\pi\tau\nu}$$

La règle du retard donne :

$$f(t) = g(t - t_0) \xrightarrow{TF} F(\nu) = e^{-j2\pi t_0 \nu} G(\nu)$$

Donc :

$$F(\nu) = e^{-j2\pi t_0 \nu} \frac{\tau}{1+j2\pi\tau\nu}$$

3. Module : $|F(\nu)| = \frac{\tau}{\sqrt{1+4\pi^2\tau^2\nu^2}}$
 4. Argument : $\arg F(\nu) = -2\pi t_0 \nu - \arctan(2\pi\tau\nu)$

On peut poser : $\nu_0 = \frac{1}{2\pi\tau} \Leftrightarrow \omega_0 = \frac{1}{\tau}$.

Mis à part le retard pur t_0 (\Leftrightarrow déphasage linéaire $\phi(\nu) = -2\pi t_0 \nu$), on a un système du 1^{er} ordre classique.

15.79 Corrigé du 13.79 Pompe

1. cas $p = 3$: voir Fig. 15.27.
 2. A ces trois instants, on a : $Q_3(t) = \sqrt{3}/2 \approx 0.86$
 3. Voir la somme des débits pour 3 pistons : courbe du haut de la Fig. 15.27.
 4. Cas $p = 4$:

$$Q_4(t + \pi/2) = f(t + \pi/2) + f(t + \pi) + f(t + 3\pi/2) + \underbrace{f(t + 2\pi)}_{f(t)} = Q_4(t)$$

5. Pour $t \in [0; \pi/2]$, on a : $q_3 = q_4 = 0$, donc : $Q_4(t) = \sin t + \sin(t + \pi/2) = \sin t + \cos t = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin t + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos t \right) = \sqrt{2} \sin \left(t + \frac{\pi}{4} \right)$ CQFD

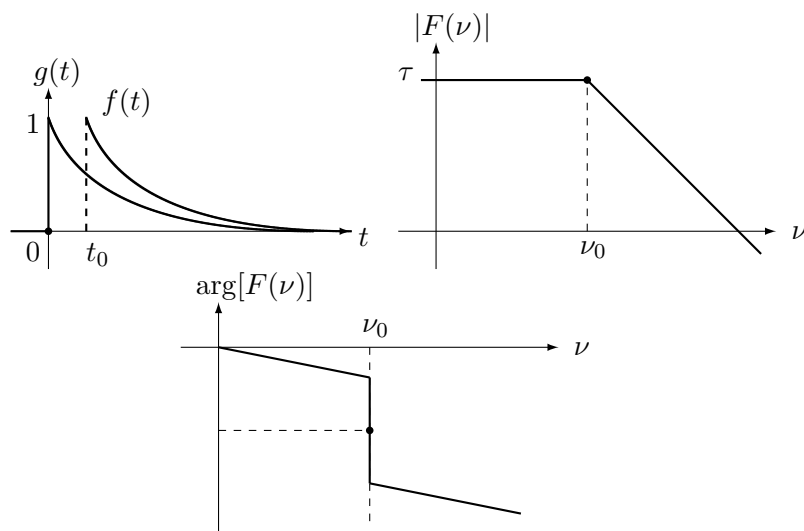


FIGURE 15.26 – Exponentielle décroissante et sa transformée de Fourier.

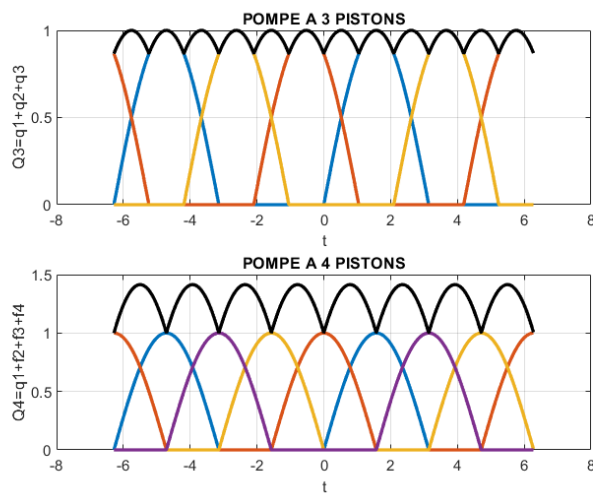


FIGURE 15.27 – Débit de pompe à 3 ou à 4 pistons.

6. $Q_4(0) = 1$ et $Q_4(\pi/4) = \sqrt{2}$
7. Voir la courbe du bas de la Fig. 15.27 pour 4 pistons.
8. $a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \sin t dt = \frac{1}{\pi}$
9. $Q_{4moy} = 4/\pi \approx 1.27$ et $Q_{3moy} = 3/\pi \approx 0.95$

10. $Q_{3_{min}} = \sqrt{3}/2$ et $Q_{3_{max}} = 1$
 $Q_{4_{min}} = 1$ et $Q_{4_{max}} = \sqrt{2}$
11. $\theta_3 = 0.140 < \theta_4 = 0.326$, donc trois pompes donnent un débit plus régulier.
12. $a_0 = \frac{1}{\pi}$; $b_k = 0$; $a_{2n+1} = 0$; $a_{2n} = \frac{-2}{\pi(4n^2 - 1)}$.

Donc le DSF vaut :

$$f(t) = \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} \cos 2nt$$

13. On a respectivement : $\cos(2n(t + \frac{\pi}{2})) = (-1)^n \cos 2nt$; $\cos(2n(t + \pi)) = \cos 2nt$ et $\cos(2n(t + \frac{3\pi}{2})) = (-1)^n \cos 2nt$. D'où les DSF correspondants.
14. Quand n est impair, $Q_4(t) = 0$ car la somme des quatre termes s'annule.
 Quand $n = 2p$, donc pair : la somme des quatre termes vaut $4 \times$ l'un des termes.
 Le DSF de $Q_4(t)$ s'en déduit simplement.
 Le premier harmonique de rang 4 est atténué : amplitude $8/(15\pi)$.
15. Voir Fig. 15.28.

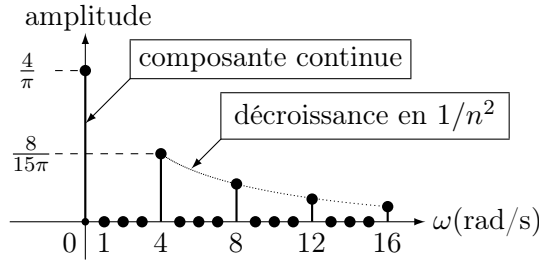


FIGURE 15.28 – Décomposition fréquentielle du débit $Q_4(t)$.

16. $Q_3(t)$ est une fonction paire et périodique de période $T = \pi/3$. Donc tous les coefficients b_k du DSF de $Q_3(t)$ sont nuls. La composante continue vaut $a_0 = Q_{3_{moy}} = 3/\pi$. Les coefficients a_k se calculent par la formule :

$$a_k = \frac{12}{\pi} \int_0^{\pi/6} Q_3(t) \cos(6kt) dt \quad \text{où} \quad Q_3(t) = \sin(t + \pi/3)$$

On intègre en posant $x = t + \pi/3$, et utilisant la formule de linéarisation $2 \sin a \cos b = \sin(a + b) + \sin(a - b)$:

$$a_k = \frac{12}{\pi} \int_{\pi/3}^{\pi/2} \sin(x) \cos(6kx) dx = \frac{6}{\pi} \int_{\pi/3}^{\pi/2} [\sin(1 + 6k)x + \sin(1 - 6k)x] dx$$

$$a_k = \frac{6}{\pi} \left[\frac{\frac{1}{2} - \cos(\frac{\pi}{2} + 3k\pi)}{1 + 6k} + \frac{\frac{1}{2} - \cos(\frac{\pi}{2} - 3k\pi)}{1 - 6k} \right] = \frac{3}{\pi} \left[\frac{1}{1 + 6k} + \frac{1}{1 - 6k} \right]$$

$$\boxed{a_k = \frac{6}{\pi(1 - 36k^2)}} \approx \frac{-1}{6\pi k^2} \text{ quand } k \rightarrow \infty.$$

On obtient ainsi le DSF de $Q_3(t)$. On conclut que la contribution harmonique est très peu impactante sur le débit moyen : le premier harmonique est seulement de rang 6, et a une amplitude très faible : $6/(35\pi)$. Le calcul confirme donc que $Q_3(t)$ est mieux que $Q_4(t)$.

15.80 Corrigé du 13.80 Lavinas

Cas de CI nulles :

1.

$$\begin{cases} pN_1(p) - n_1(0) &= Q_1(p) - 2N_1(p) + N_2(p) \\ pN_2(p) - n_2(0) &= Q_2(p) + N_1(p) - 2N_2(p) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (p+2)N_1(p) &= Q_1(p) + N_2(p) \\ (p+2)N_2(p) &= Q_2(p) + N_1(p) \end{cases}$$

En calculant somme et différence de ces deux dernières équations, on démontre les deux expressions attendues.

2. Dans ce cas, $Q_1(p) = Q_2(p) = 1/p$. On trouve alors : $N_1(p) = N_2(p) = \frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}$. D'où $\boxed{n_1(t) = \mathcal{U}(t)[1 - e^{-t}] \equiv n_2(t)}$.
3. Il s'agit de la réponse classique d'un filtre passe-bas du 1^{er} ordre, dont la constante de temps vaut ici 1. Fig. 15.33a.
4. Dans ce cas, $Q_1(p) = 0$; $Q_2(p) = 1/p$. On trouve :

$$N_1(p) = \frac{1/3}{p} + \frac{-1/2}{p+1} + \frac{1/6}{p+3} \quad (15.10)$$

$$N_2(p) = \frac{2/3}{p} + \frac{-1/2}{p+1} + \frac{-1/6}{p+3} \quad (15.11)$$

D'où :

$$n_1(t) = \mathcal{U}(t) \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{-3t} \right] \quad (15.12)$$

$$n_2(t) = \mathcal{U}(t) \left[\frac{2}{3} - \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{6}e^{-3t} \right] \quad (15.13)$$

5. Cas de CI non nulle : dans ce cas, on trouve :

$$N_1(p) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+3} \right] \quad (15.14)$$

$$N_2(p) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+3} \right] \quad (15.15)$$

6. D'où :

$$n_1(t) = \frac{1}{2} [e^{-t} + e^{-3t}] \cdot \mathcal{U}(t) \quad (15.16)$$

$$n_2(t) = \frac{1}{2} [e^{-t} - e^{-3t}] \cdot \mathcal{U}(t) \quad (15.17)$$

7. Le maximum de $f_2(t)$ correspond à l'annulation de sa dérivée :

$f_2'(t) = -e^{-t} + 3e^{-3t}$. Donc $f_2'(t) = 0 \Leftrightarrow e^{-2t} = \frac{1}{3} \Rightarrow t = \frac{\ln 3}{2}$ qui est l'instant du maximum.

$\forall t \in \mathbb{R}^+, f_1(t) - f_2(t) = 2e^{-3t} > 0$, donc $f_1(t) > f_2(t)$.

8. On a : $f_1(t) = 2n_1(t)$ et $f_2(t) = 2n_2(t)$, d'où l'intérêt de leur étude. Voir Fig. 15.29.

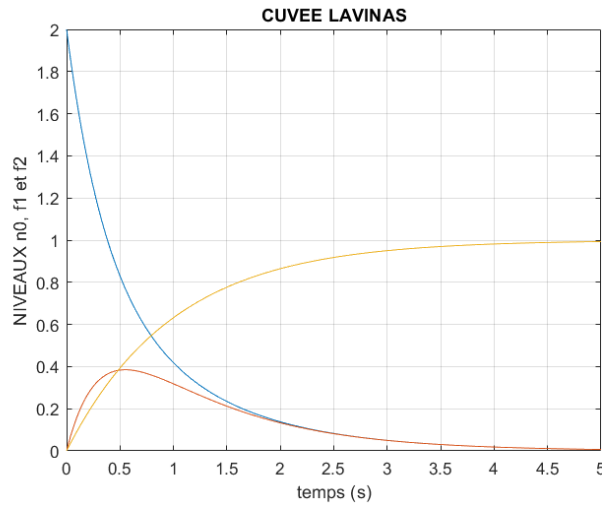


FIGURE 15.29 – Niveaux de remplissage de cuves.

15.81 Corrigé du 13.81 Amorti

1. La Fig. 15.30 montre le graphe de la sinusoïde amortie, obtenu avec le programme Matlab simulateur des exercices (section ??).

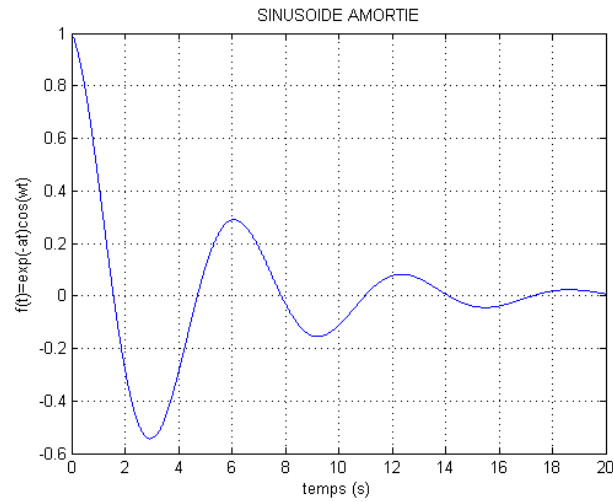


FIGURE 15.30 – Sinusoïde amortie.

2. Dans les tables de transformées (Tab. 12.7, p. 181), on a :

$$e^{-t}\mathcal{U}(t) \longrightarrow \frac{1}{1+j2\pi\nu} \quad (15.18a)$$

$$f\left(\frac{t}{a}\right) \longrightarrow |a|F(a\nu) \quad (15.18b)$$

$$\cos(2\pi\nu_0 t) \longrightarrow \frac{1}{2}[\delta(\nu + \nu_0) + \delta(\nu - \nu_0)] \quad (15.18c)$$

$$f(t).g(t) \longrightarrow F(\nu) * G(\nu) \quad (15.18d)$$

Posons $\omega = 2\pi\nu_0$: $F(\nu) = TF[e^{-at}\mathcal{U}(t) \cdot \cos 2\pi\nu_0 t]$. Donc

$$F(\nu) = TF[e^{-at}\mathcal{U}(t)] * TF[\cos \omega t] = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1+j2\pi\frac{\nu}{a}} * \frac{1}{2}[\delta(\nu + \nu_0) + \delta(\nu - \nu_0)]$$

Or l'impulsion de Dirac est l'élément neutre de la convolution $*$. D'où :

$$F(\nu) = \frac{1}{2a} \left[\frac{1}{1+j2\pi\frac{\nu+\nu_0}{a}} + \frac{1}{1+j2\pi\frac{\nu-\nu_0}{a}} \right]$$

15.82 Corrigé du 13.82 Alternance négative

1. Il s'agit d'un signal mono-alternance négatif. Or on connaît le DSF d'un signal $s(t)$ redressé simple alternance positif, cf. Eq.(13.26), p.219. Ici on a

$f(t) = -s(-t)$ puisqu'on retourne l'axe des temps et on change le signe.
Donc : $\text{DSF}[f(t)] = -\text{DSF}[s(-t)]$ soit :

$$f(t) = -\frac{A}{\pi} + \frac{A}{2} \sin \omega_0 t + \frac{2A}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2n\omega_0 t)}{4n^2 - 1}$$

2. On constate l'existence : d'une composante continue négative, du fondamental ω_0 , et des harmoniques pairs $2n\omega_0$ uniquement.

15.83 Corrigé du 13.83 TL système 1^{er}O

1. L'équation transformée donne : $apS(p) + S(p) = E(p) \Rightarrow \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{1 + ap}$

Il s'agit d'un système du 1^{er} ordre.

2. La transformée de la rampe vaut : $E(p) = \frac{b}{p^2}$ donc : $S(p) = \frac{b}{p^2} \cdot \frac{1/a}{p+1/a}$.
La décomposition de la fraction rationnelle en éléments simples donne :
 $S(p) = b \left[\frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{p+1/a} \right]$ avec : $A = -a$, $B = 1$ et $C = a$.

3. La fonction originale vaut donc (où $\mathcal{U}(t)$ est l'échelon de Heaviside) :

$$s(t) = b \mathcal{U}(t) [-a + t + ae^{-t/a}] \Rightarrow s(t) = b[t - a(1 - e^{-t/a})]\mathcal{U}(t)$$

Le graphe de $s(t)$ est semblable à la courbe de la Fig. 15.33b, p. 329.

15.84 Corrigé du 13.84 TL EDLCC

- Transformation de l'équation : $(p^2 + 4p + 3)Y(p) = \frac{5}{p+2}$
- Fraction algébrique : $Y(p) = \frac{5}{(p+2)(p^2+4p+3)}$
- Trois pôles simples réels : $p_1 = -1$, $p_2 = -2$ et $p_3 = -3$
- Décomposition : $Y(p) = \frac{A}{p+3} + \frac{B}{p+2} + \frac{C}{p+1}$ avec $A = 5/2$, $B = -5$ et $C = 5/2$.
- Original : $y(t) = \frac{5}{2}[e^{-3t} - 2e^{-2t} + e^{-t}] \Rightarrow y(t) = \frac{5}{2}e^{-t}(e^{-t} - 1)^2$
- On vérifie les conditions initiales : $y(0) = y'(0) = 0$.

15.85 Corrigé du 13.85 Dents de Scie

1. Il s'agit du signal en dent de scie centré, d'amplitude crête $A/2$.
La fonction est impaire, donc : $a_0 = 0$ et $a_n = 0$.

2. $b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} \frac{At}{T} \sin(k\omega_0 t) dt \Rightarrow b_n = \frac{-A}{n\pi} \cos n\pi$
3. Or $\cos n\pi = (-1)^n$ donc $b_n = -\frac{A}{\pi} \frac{(-1)^n}{n}$
4.
$$f(t) = -\frac{A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin(n\omega_0 t)$$
5. Illustration : spectre similaire à la Fig. 15.31 de la solution 15.87 (mais sans la composante continue, car ici la valeur moyenne est nulle : $a_0 = A_0 = 0$).
6. Présence de tous les harmoniques $n\omega_0$; amplitudes décroissantes en $1/n$.

15.86 Corrigé du 13.86 Triangle

1. On prend $t_0 = 0$ et $a_0 = 0$. Alors : $g(t) = \begin{cases} A(\frac{2}{T}t + 1) & \text{sur } [-T/2; 0] \\ A(-\frac{2}{T}t + 1) & \text{sur } [0; T/2] \end{cases}$
2. On découpe le domaine d'intégration en deux intervalles.
L'intégration par parties donne : $G(\nu) = \frac{A}{\pi^2 \nu^2 T} (1 - \cos \pi \nu T)$
Or : $1 - \cos 2\theta = 2 \sin^2 \theta$, donc : $G(\nu) = \frac{AT}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{\pi \nu T}{2}\right)$
en utilisant la notation du sinus cardinal : $\text{sinc}(x) = \sin(x)/x$.
3. Illustration du spectre : cf. Fig. 15.34b présentée dans la solution 15.90.
4. cf. la transformée d'une porte : $TF[\Pi_{T/2}(t)] = \frac{T}{2} \text{sinc}(\pi \nu \frac{T}{2})$

15.87 Corrigé du 13.87 Analyse spectrale par DSF

1. Le signal est défini par : $s(t) = \frac{A}{T}t$
2. La valeur moyenne vaut : $A_0 = \frac{A}{2}$ et les coefficients : $C_n = \frac{A}{n\pi}$
3. Allure du spectre : Fig. 15.31

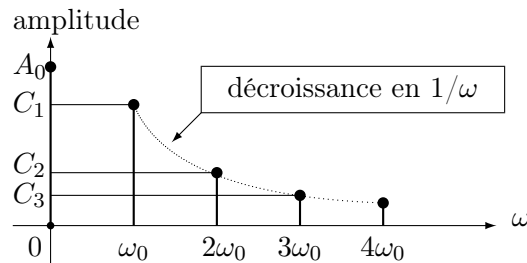


FIGURE 15.31 – Spectre fréquentiel d'un signal en dents de scie.

4. Le spectre comporte la pulsation fondamentale $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ et toutes les raies harmoniques $n\omega_0$ multiples du fondamental ; leur amplitude décroît en $1/n$.
5. Ratio : $\frac{C_n}{A_0} = \frac{2}{n\pi} \leq 0.05 \Rightarrow n \geq \frac{2}{0.05\pi} \approx 13$

15.88 Corrigé du 13.88 TL de fonction périodique

1. Illustration graphique : Fig. 15.32

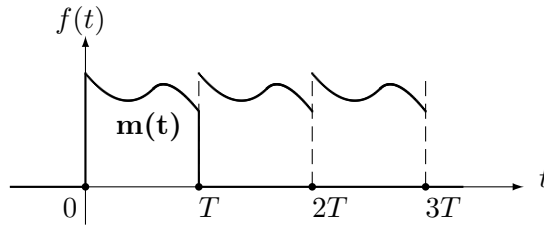
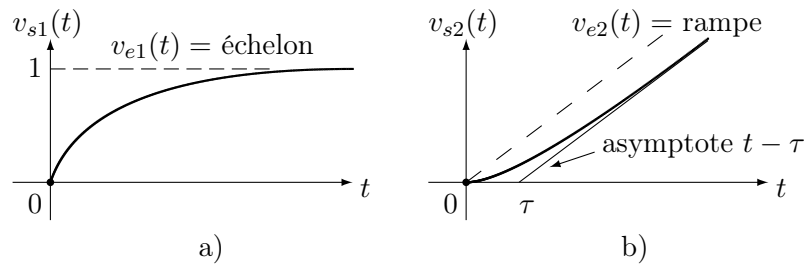


FIGURE 15.32 – Graphe des fonctions.

2. Somme : $f(t) = m(t) + m(t - T) + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} m(t - kT)$
3. Règle de translation : $F(p) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-pkT} M(p) = M(p) \sum_{k=0}^{\infty} e^{-pkT}$
4. Il s'agit d'une série géométrique.
5. La raison vaut : $r = e^{-pT}$. La série converge si $|r| < 1 \Leftrightarrow \Re(p) > 0$.
6. $\sum_{k=0}^{\infty} e^{-pkT} = \sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r}$, ceci si $|r| < 1$. CQFD.

15.89 Corrigé du 13.89 Circuit RC

1. $\tau = RC = 1 \text{ ms}$
2. $v_e(t) = RC \frac{dv_s}{dt} + v_s(t)$
3. $H(j\omega) = \frac{1}{1+jRC\omega}$
4. $V_e(p) = [RCp + 1]V_s(p)$
5. $H(p) = \frac{1}{1+\tau p} \rightarrow$ Passe-bas (intégrateur).
6. idem
7. $V_1(p) = \frac{1}{p}$ et $V_2(p) = \frac{1}{p^2}$
8. $V_s = \frac{1}{p} \times \frac{1}{1+\tau p} = \frac{1}{p} - \frac{\tau}{1+\tau p} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1/\tau}$
9. $v_s(t) = [1 - \exp(-t/\tau)]\mathcal{U}(t) \rightarrow$ charge du condensateur : Fig. 15.33a.
10. \rightarrow Passe-haut (dérivateur).

FIGURE 15.33 – Réponses du circuit électrique RC .

15.90 Corrigé du 13.90 Transformée du triangle

1. Graphe de la fonction triangle $f(t)$: Fig. 15.34a.

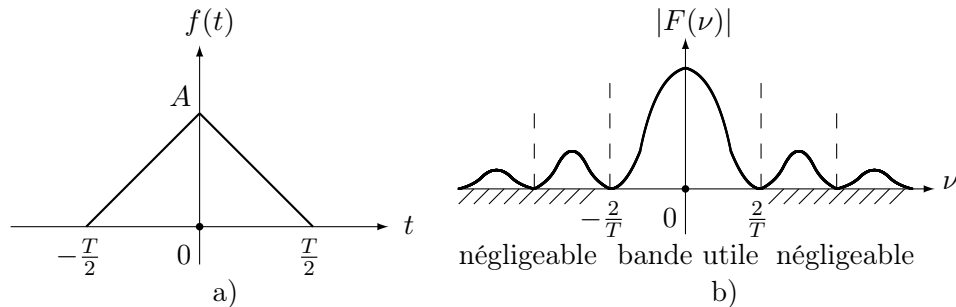


FIGURE 15.34 – Signal triangulaire et son spectre.

$$\begin{aligned}
 2. \quad F(\nu) &= \frac{2A}{T} \left[\int_{-T/2}^0 \left(t + \frac{T}{2}\right) e^{-j2\pi\nu t} dt + \int_0^{T/2} \left(\frac{T}{2} - t\right) e^{-j2\pi\nu t} dt \right] \\
 F(\nu) &= A \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j2\pi\nu t} dt + \frac{2A}{T} \left[\int_{-T/2}^0 t e^{-j2\pi\nu t} dt + \int_0^{T/2} (-t) e^{-j2\pi\nu t} dt \right] \\
 \Rightarrow F(\nu) &= A \frac{T^2}{2} \left[\frac{\sin(\pi\nu T/2)}{\pi\nu T/2} \right]^2
 \end{aligned}$$

3. Spectre : voir Fig. 15.34b.

4. Le spectre d'un triangle est un **sinus cardinal au carré**. En effet, le triangle résulte de la convolution d'une porte avec elle-même.

15.91 Corrigé du 13.91 Vibration

1. La fonction est paire et de valeur moyenne nulle donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = 0$ et $a_0 = 0$. Le développement s'exprime par : $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t$. Le calcul

des coefficients des termes en cosinus donne : $a_n = \frac{4F}{n\pi} \sin(n\frac{\pi}{2})$. Seuls les coefficients impairs sont non nuls : pour $n = 2p + 1$, $a_n = a_{2p+1} = \frac{4F(-1)^p}{(2p+1)\pi}$. D'où :

$$f(t) = \sum_{p=0}^{\infty} F_{2p+1} \cos(2p+1)\omega t = \frac{4F}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)} \cos(2p+1)\omega t$$

Notons $F_n = a_n$; pour n impair uniquement, on a : $\frac{F_n}{F} = \frac{4}{n\pi}$.

On a donc : $\left| \frac{F_{2p+1}}{F} \right| = \frac{4}{(2p+1)\pi}$

2. (a) pour $\omega = \omega_0/0.8$, il n'y a pas de problème (atténuation des harmoniques).
- (b) pour $\omega = \omega_0/5.3$, il y a un problème (risque de surtension : amplification de l'harmonique 5).
3. Le Tab. 15.6 fournit le résultat des calculs d'amplitudes.

TABLE 15.6 – Harmoniques.

n	1	3	5	7	9	11	13
F_n/F	1.2732	0.4244	0.2546	0.1819	0.1415	0.1157	0.0979
(a) X_n/δ	2.2096	0.0325	0.0067	0.0024	0.0011	0.0006	0.0004
(b) X_n/δ	1.32	0.6224	1.7572	0.2406	0.0748	0.0349	0.0195

4. N.B. : $\zeta = 0.05 \Rightarrow Q = 20\text{dB} \Rightarrow \text{amplification} \times 10$.

5.

$$\left| \frac{X_{2p+1}}{F/k} \right| = \left| \frac{4}{(2p+1)\pi} \right| \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{(2p+1)\omega}{\omega_0} \right)^2 \right]^2 + \left[2\zeta \frac{(2p+1)\omega}{\omega_0} \right]^2}}$$

15.92 Corrigé du 13.92 Radar

1. $x(t)$ est une porte de largeur T et d'amplitude A : la Fig. 15.11, p. 301 donne l'allure de ce signal et de son spectre fréquentiel $X(\nu)$.

L'autocorrélation vaut par définition : $c_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t-\tau)dt$.

$$\begin{cases} \text{si } |\tau| > T & c_x(\tau) = 0 \\ \text{si } 0 < \tau < T & c_x(\tau) = \int_{-T/2+\tau}^{T/2} A^2 dt = A^2(T-\tau) \\ \text{si } -T < \tau < 0 & c_x(\tau) = \int_{-T/2}^{T/2+\tau} A^2 dt = A^2(T+\tau) \end{cases}$$

En résumé, pour $0 < |\tau| < T$: $c_x(\tau) = A^2(T - |\tau|)$ (cf. Fig. 15.35).

Pour la transformée de Fourier $C_x(\nu) = TF[c_x(\tau)]$, on peut faire le calcul direct, ou remarquer que l'autocorrélation peut s'exprimer avec une convolution : $c_x(\tau) = x(\tau) * x^*(-\tau)$. Comme $x(t)$ est réel et pair, $X(\nu)$ est aussi réel et pair, et l'on déduit que : $c_x(\tau) = x(\tau) * x(\tau)$. D'où l'on obtient simplement :

$$C_x(\nu) = |X(\nu)|^2 = A^2 T^2 \frac{\sin^2(\pi \nu T)}{(\pi \nu T)^2}$$

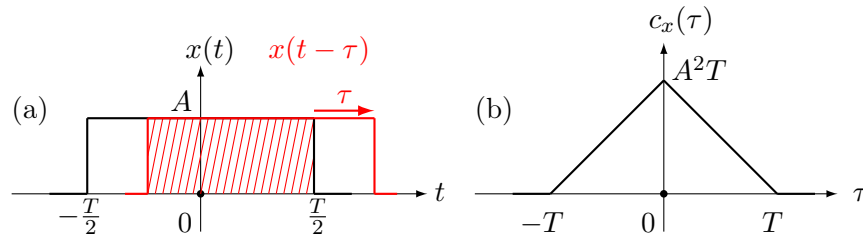


FIGURE 15.35 – Autocorrélation d'une porte.

2. $y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t - nT_r)$, où la période est $T_r = 1/f_r$. Donc :

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t) * \delta(t - nT_r) = x(t) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_r)$$

La TF de $y(t)$ s'exprime en utilisant la formule de Poisson :

$$Y(\nu) = X(\nu) \times TF \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_r) \right] = X(\nu) \cdot \left[f_r \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\nu - nf_r) \right]$$

$$\text{D'où : } Y(\nu) = f_r \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(nf_r) \delta(\nu - nf_r).$$

On obtient un peigne de Dirac dont l'amplitude des raies est modulée en sinus cardinal car : $X(nf_r) = AT \operatorname{sinc}(\pi n f_r T)$.

3. Une impulsion radar est une "bouffée de sinusoïde" :

$$s_0(t) = \underbrace{x(t)}_{\text{modulant}} \cdot \underbrace{K \cos 2\pi f_p t}_{\text{porteuse}}$$

$$S_0(\nu) = X(\nu) * TF[K \cos 2\pi f_p t] = X(\nu) * \frac{K}{2} [\delta(\nu - f_p) + \delta(\nu + f_p)]$$

D'où : $S_0(\nu) = \frac{K}{2}[X(\nu - f_p) + X(\nu + f_p)]$. Le spectre comporte donc deux motifs en sinus cardinal : l'un centré en f_p , l'autre en $-f_p$.

4. De même, si $s(t) = y(t) \cdot K \cos 2\pi f_p t$, on aura :

$$S(\nu) = \frac{K}{2}[Y(\nu - f_p) + Y(\nu + f_p)]$$

Le spectre est fait de deux peignes de Dirac modulés en sinus cardinal, l'un centré sur f_p et l'autre sur $-f_p$.

5. Si le signal modulant est limité dans le temps sur une durée D , on peut écrire la troncature via une porte centrée : $w(t) = y(t) \cdot \Pi_D(t)$. D'où :

$$W(\nu) = Y(\nu) * D \operatorname{sinc}(\pi\nu D) = f_r D \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(n f_r) \delta(\nu - n f_r) * \operatorname{sinc}(\pi\nu D).$$

Donc les raies de $Y(\nu)$ deviennent des sinus cardinaux centrés en $n f_r$:

$$W(\nu) = f_r D \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(n f_r) \cdot \operatorname{sinc}[\pi D(\nu - n f_r)]$$

Finalement, le signal radar modulé et reçu tronqué peut s'écrire :

$z(t) = w(t) \cdot K \cos 2\pi f_p t$, d'où sa transformée de Fourier :

$Z(\nu) = W(\nu) * \frac{K}{2}[\delta(\nu - f_p) + \delta(\nu + f_p)]$ et ainsi :

$$Z(\nu) = \frac{K}{2}[W(\nu - f_p) + W(\nu + f_p)]$$

Le spectre résultant est illustré sur la Fig. 15.36. Au lieu d'avoir un spectre de raies, on a une série de fonctions en sinus cardinal. Si $D f_r \gg 1$, seule une de ces fonctions a une valeur non négligeable. Dans le cas contraire, on aura un mélange nuisible au bon décodage du signal transmis.

15.93 Corrigé du 13.93 Corrélateur

1. La fonction d'autocorrélation du signal réel $x(t)$ vaut :

$$\gamma_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{[T]} x(t) x(t - \tau) dt$$

d'où le schéma de principe du circuit corrélateur (Fig. 15.38).

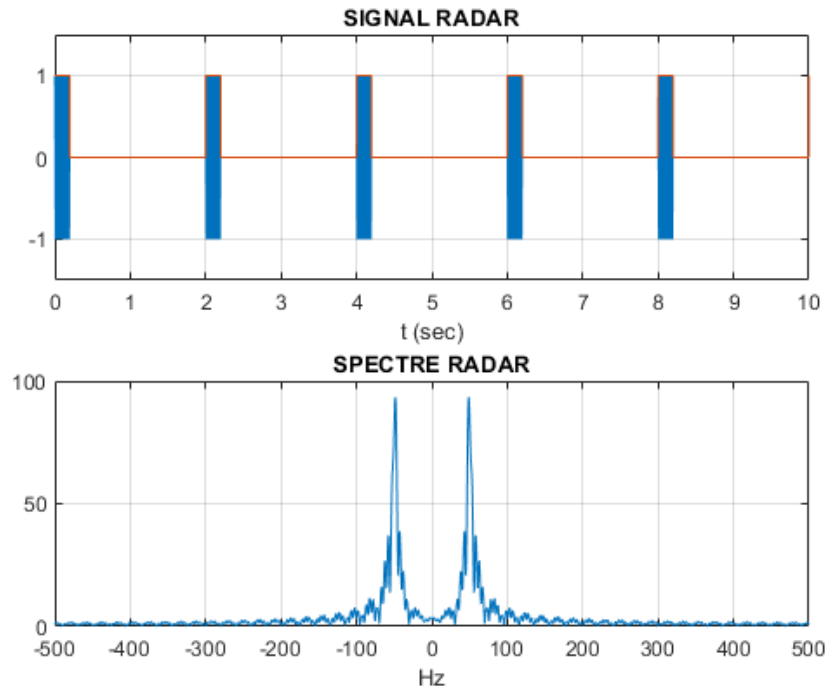


FIGURE 15.36 – Signal radar et son spectre.

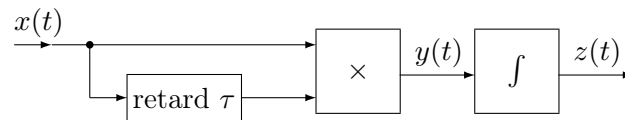


FIGURE 15.37 – Circuit du corrélateur analogique.

2. La fonction de transfert du filtre RC servant d'intégrateur vaut :

$$H(\nu) = \frac{Z(\nu)}{Y(\nu)} \underbrace{=}_{\text{si } y(t) = e^{j2\pi\nu t}} \frac{z(t)}{y(t)} = \frac{\frac{1}{j2\pi\nu C}}{R + \frac{1}{j2\pi\nu C}}$$

Notons la fréquence de coupure du filtre : $\nu_c = \frac{1}{2\pi RC}$. Alors :

$$H(\nu) = \frac{1}{1 + j\nu/\nu_c} = |H(\nu)| \cdot e^{j \arg H(\nu)}$$

où : $|H(\nu)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\nu}{\nu_c}\right)^2}}$ et : $\arg H(\nu) = -\arctan \frac{\nu}{\nu_c}$.

Calculons aussi la réponse impulsionnelle : on sait que $\frac{1}{p+a} \subset u(t)e^{-at}$ avec $p = j\omega = j2\pi\nu$. Ici on a $H(p) = \frac{1}{1+RCp} = \frac{1}{RC} \cdot \frac{1}{p+\frac{1}{RC}}$, donc $h(t) = \frac{1}{RC}e^{-t/RC}u(t)$, soit $h(t) = 2\pi\nu_c e^{-2\pi\nu_c t}$, où $u(t)$ est l'échelon unité.

3. L'autocorrélation vaut : $\gamma_x(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos(2\pi\nu_0\tau)$.

On constate que sa fréquence est identique à celle du signal $x(t)$.

4. La démarche en trois étapes pour calculer $z(t)$ est la suivante :

$$y(t) \xrightarrow{TF} Y(\nu) \xrightarrow{H(\nu)} Z(\nu) \xrightarrow{TF^{-1}} z(t)$$

On trouve (en utilisant la formule $\cos a \cos b$) :

$$y(t) = x(t) \times x(t - \tau) = \underbrace{\frac{A^2}{2} \cos(2\pi\nu_0\tau)}_{\gamma_x(\tau) \text{ indép. de } t} + \frac{A^2}{2} \cos\left[\underbrace{2\pi(2\nu_0)}_{\text{fréq. double}} \underbrace{(t - \tau/2)}_{\text{retard}}\right]$$

La transformée de Fourier donne :

$$Y(\nu) = \underbrace{\gamma_x(\tau) \cdot \delta(\nu)}_{\text{TF d'une cste}} + \frac{A^2}{4} \underbrace{[\delta(\nu - 2\nu_0) + \delta(\nu + 2\nu_0)]}_{\text{TF du cos de fréq. } 2\nu_0} \underbrace{e^{-j2\pi\nu\tau/2}}_{\text{déphasage}}$$

La propriété de l'impulsion de Dirac donne :

$$Z(\nu) = H(\nu)Y(\nu) = H(0)\gamma_x(\tau)\delta(\nu) + \frac{A^2}{4} [H(2\nu_0)e^{-j2\pi\nu_0\tau}\delta(\nu - 2\nu_0) + H(-2\nu_0)e^{+j2\pi\nu_0\tau}\delta(\nu + 2\nu_0)]$$

Or $H(0) = 1$ et $H(\pm 2\nu_0) = H_0 e^{j\mp\Phi_0}$, où :

$$H_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2\nu_0}{\nu_c}\right)^2}} \text{ et : } \Phi_0 = \arctan\left(\frac{2\nu_0}{\nu_c}\right).$$

On remonte à l'original $z(t)$, sachant que l'original d'une impulsion de Dirac est une exponentielle complexe :

$$z(t) = \gamma_x(\tau) + \frac{A^2}{4} H_0 \left[e^{j[2\pi 2\nu_0(t-\tau/2)-\Phi_0]} + e^{-j[2\pi 2\nu_0(t-\tau/2)-\Phi_0]} \right]$$

D'où finalement :

$$z(t) = \gamma_x(\tau) + \underbrace{\frac{A^2}{2} H_0 \cos[2\pi(2\nu_0)(t - \tau/2) - \Phi_0]}_{\text{fluctuation}}$$

Ceci est normal pour un filtre causal : la composante variable de $y(t)$ est atténuée de H_0 et déphasée de Φ_0 . Le deuxième terme de $z(t)$ correspond aux fluctuations, tandis que le premier terme est le résultat souhaité.

5. On remarque que $\gamma_x(0) = A^2/2$. Donc la fluctuation sera $\leq \epsilon \gamma_x(0)$ SSI : $H_0 \leq \epsilon \Rightarrow \nu_c \leq 2\nu_0 \frac{\epsilon}{\sqrt{1-\epsilon^2}}$. Si l'on veut $\epsilon \ll 1 \Rightarrow \boxed{\nu_c \leq 2\nu_0 \epsilon}$

A.N. : $\nu_c \leq 0.2$ Hz.

6. On s'intéresse maintenant à l'aspect temporel (et non plus fréquentiel) du problème, en tenant compte du fait que la mesure démarre forcément à un instant initial $t = 0$.

Considérant que $x(t) = 0$ pour $t < 0$, le signal utile en sortie du multiplieur s'exprime alors : $y(t) = x(t)x(t-\tau) \cdot u(t-\tau)$ où $u(t)$ est l'échelon unité, car $x(t-\tau) = 0$ pour $t < \tau$: on ne dispose de la sortie du multiplieur qu'à partir de l'instant $t = \tau$.

Supposant que la partie oscillante de $y(t)$ est bien éliminée par le filtrage (cf. résultat de la question précédente), sa partie apériodique vaut donc : $y_1(t) = \gamma_x(\tau) \cdot u(t-\tau)$.

La sortie du pseudo-intégrateur constitué par le filtre RC s'exprime comme la convolution de l'entrée par la réponse impulsionnelle du filtre : $z_1(t) = y_1(t) * h(t)$. Le terme $\gamma_x(\tau)$ étant une constante, et la convolution étant commutative, le problème se réduit au calcul simple du produit de convo-

lution suivant : $h(t) * u(t-\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\theta)u(t-\tau-\theta)d\theta$. Or $h(\theta) = 0$ pour $\theta < 0$, et $u(t-\tau-\theta) = \begin{cases} 0 & \text{pour } \theta > t-\tau \\ 1 & \text{pour } \theta < t-\tau \end{cases}$, donc l'intégrale est limitée entre 0 et $t-\tau$ et se réduit à :

$$h(t) * u(t-\tau) = \int_0^{t-\tau} h(\theta)d\theta = \int_0^{t-\tau} \frac{1}{RC} e^{-\frac{\theta}{RC}} d\theta = \left[-e^{-\frac{\theta}{RC}} \right]_0^{t-\tau} = 1 - e^{-\frac{t-\tau}{RC}}$$

On obtient ainsi : $z_1(t) = \gamma_x(\tau) \left[1 - e^{-\frac{t-\tau}{RC}} \right]$, valable uniquement pour $t > \tau$.

Finalement, la sortie temporelle du filtre s'exprime sous la forme :

$$\boxed{z_1(t) = \gamma_x(\tau) \left[1 - e^{-2\pi\nu_c(t-\tau)} \right] u(t-\tau)}$$

On aura $z_1(t) \geq (1-\epsilon)\gamma_x(\tau)$ SSI $e^{-2\pi\nu_c(t-\tau)} < \epsilon \Leftrightarrow t > T_{min} = \tau - \frac{\ln \epsilon}{2\pi\nu_c}$.

7. Soit une valeur minimale : $\boxed{T_{min} = \tau - RC \ln \epsilon}$

8. A.N. : pour $\nu_c = 0.2$ Hz , $\epsilon = 10^{-2}$ et $\tau_M = 0.1$ s, on trouve : $T \approx 3.76$ s.

Il faudra donc appliquer le signal pendant 4 secondes environ à l'entrée du corrélateur pour avoir une mesure correcte.

On touche ici du doigt le rôle et le positionnement du traitement de signal, discipline à l'interface entre la perfection de la théorie mathématique idéale, et la réalité concrète de la physique dans le monde réel. C'est ce qui fait tout son intérêt et son piquant !

9. **Complément informatique** : le programme Matlab **mathEllips0.m** de la section 16.1 permet une simulation de cet exercice. La Fig. 15.38 illustre les résultats.

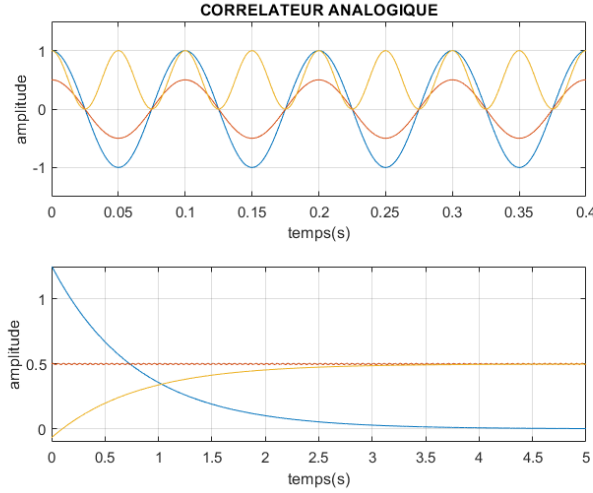


FIGURE 15.38 – Corrélateur.

15.94 Corrigé du 13.94 Filtre récursif

1. On a : $\frac{p}{K}(z+1) = z-1 \Rightarrow z = \frac{1+\frac{p}{K}}{1-\frac{p}{K}}$ donc, pour $p = j2\pi\nu$ (ν étant la fréquence analogique), on obtient : $z = \frac{1+j\Phi}{1-j\Phi}$ avec $\Phi = \frac{2\pi\nu}{K} \Rightarrow z = e^{j2\arctan \Phi}$ qui appartient au cercle unité car $|z| = 1$: $z = e^{j\theta}$ avec $\theta = 2\arctan \Phi$. Or $\theta = 2\pi f/F_e$ où f est la fréquence numérique. D'où :

$$\boxed{f = \frac{F_e}{\pi} \arctan \frac{2\pi\nu}{K}} \text{ et : } \boxed{\nu \in]-\infty; +\infty[\Leftrightarrow f \in]-F_e/2; +F_e/2[}$$

Donc l'axe des fréquences analogiques se contracte sur une bande de largeur F_e en numérique (respectant le théorème de Shannon : à l'extérieur de $] -F_e/2; F_e/2[$ il n'y a rien, le spectre est nul).

2. On a $H(f) = H_N(z) = H_A(p) = H_A(K \frac{z-1}{z+1}) = H_A(j2\pi\nu)$.

Pour $\nu \ll \frac{K}{2\pi}$, on a $f \simeq \frac{2F_e}{K}\nu$ car $\arctan x \sim x$ (Fig. 15.39).

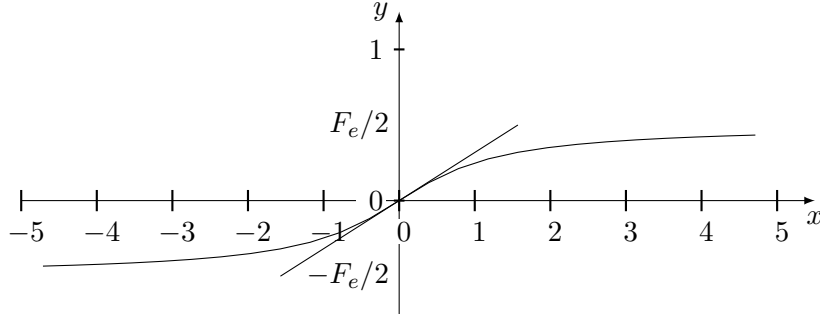


FIGURE 15.39 – Allure de la fonction arctangente comparée à l'identité.

3. La fonction de transfert du circuit analogique vaut :

$$H_A(j2\pi\nu) = \frac{1}{2} \frac{(2\pi\nu_0)^2 - (2\pi\nu)^2}{(2\pi\nu_0)^2 + 2\zeta(2\pi\nu_0)j2\pi\nu - (2\pi\nu)^2} = \frac{1}{2} \frac{\nu_0^2 - \nu^2}{(\nu_0^2 - \nu^2) + j2\zeta\nu_0\nu}$$

On a : $\begin{cases} H_A(0) = H_A(\infty) = \frac{1}{2} \\ H_A(\pm\nu_0) = 0 \end{cases}$. Il s'agit d'un filtre réjecteur de fréquence ν_0 , et dont la largeur de bande coupée dépend de ζ (Fig. 15.40).

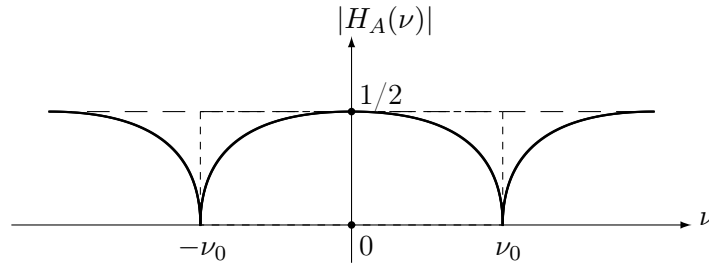


FIGURE 15.40 – Fonction de transfert du filtre réjecteur.

4. On a avec le filtre analogique $H_A(j2\pi\nu) = 0$ pour $\nu = \pm\nu_0$, donc on aura avec le filtre numérique $H(f) = 0$ pour $f = \pm \frac{F_e}{4}$ si :

$$\pm \frac{1}{4} = \frac{1}{\pi} \arctan \left(\pm \frac{2\pi\nu_0}{K} \right) \Rightarrow \tan \left(\pm \frac{\pi}{4} \right) = \pm \frac{2\pi\nu_0}{K} \Rightarrow \boxed{K = 2\pi\nu_0}$$

5.

$$\begin{aligned}
 H_N(z) = H_A(p) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{K^2 + \left(K \frac{z-1}{z+1}\right)^2}{K^2 + 2\zeta K \left(K \frac{z-1}{z+1}\right) + \left(K \frac{z-1}{z+1}\right)^2} \\
 &= \dots = \frac{1}{2} \cdot \frac{z^2 + 1}{z^2(1 + \zeta) + (1 - \zeta)}
 \end{aligned}$$

$$H_N(z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + z^{-2}}{(1 + \zeta) + (1 - \zeta)z^{-2}}$$

On peut écrire la fonction de transfert du filtre numérique sous la forme :

$$H_N(z) = \frac{b + b \cdot z^{-2}}{1 + a \cdot z^{-2}} = \frac{Y(z)}{X(z)} \text{ avec : } b = \frac{1}{2(1 + \zeta)} \text{ et : } a = \frac{1 - \zeta}{1 + \zeta}$$

$$\Rightarrow Y(z) = bX(z) + bz^{-2}X(z) - az^{-2}Y(z)$$

La transformée inverse donne l'expression des échantillons de sortie du filtre par une équation de récurrence (dite équation aux différences) :

$$y(n) = b \cdot x(n) + b \cdot x(n - 2) - a \cdot y(n - 2)$$

On en déduit le diagramme du circuit numérique de la Fig. 15.41 (où z^{-1} représente un retard pur, c'est-à-dire un registre à décalage d'une unité temporelle).

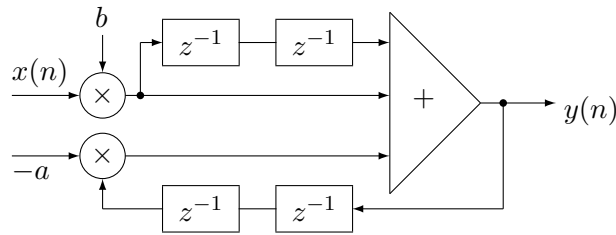


FIGURE 15.41 – Circuit numérique du filtre réjecteur.

6. Le filtre est causal, donc réalisable, car il ne fait intervenir que les échantillons passés et présents, mais pas les échantillons futurs.
7. Pour étudier la stabilité, on calcule les pôles de la fonction de transfert :

$$1 + az^{-2} = 0 \Rightarrow z_0^2 = -a = \frac{\zeta - 1}{\zeta + 1}$$

On vérifie qu'ils sont à l'intérieur du cercle unité : $|z_0| = \left| \frac{\zeta-1}{\zeta+1} \right| \leq 1$, ce qui est toujours vrai car $\zeta = \frac{R}{4} \sqrt{\frac{C}{L}}$ est toujours ≥ 0 . Donc le filtre est toujours stable.

Mais attention : pour $\boxed{\zeta \ll 1}$ (donc proche de zéro), on peut avoir des erreurs d'arrondi qui posent problème. Si l'on approxime $a \approx 1$ dans l'équation de récurrence (et en supposant les buffers vides à l'instant initial, *i.e.* $x_n = y_n = 0$ pour $n < 0$), on obtient en effet : $\forall n \in \mathbb{N}, \boxed{y_n = b \cdot x_n}$! On tombe alors sur un **cycle-limite** : le signal de sortie est proportionnel au signal d'entrée et le filtre ne remplit plus du tout son rôle de réjecteur. D'où l'importance dans la précision des coefficients calculés : le numérique ne présente pas la même robustesse que l'analogique (où, si l'on prend une valeur de résistance R légèrement différente, on obtient simplement un résultat de filtrage légèrement différent ...) On touche ici du doigt un des rares inconvénients du numérique.

15.95 Corrigé du 13.95 Filtre réjecteur

1. Démonstration de l'expression de $H_A(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}$, où $X(p)$ et $Y(p)$ sont les transformées de Lapalce des tensions d'entrée et de sortie du circuit.

On voit que le circuit électrique est un pont diviseur de tension.

Donc le rapport des tensions est égal aux rapport des impédances :

$$\frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{Z}{R+Z}$$

où l'impédance Z correspond à une mise en parallèle ($Z \equiv (L+C)//R$), c'est-à-dire que :

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + \frac{1}{Lp + \frac{1}{Cp}} = \frac{1}{R} + \frac{Cp}{1 + LCp^2}$$

$$\Rightarrow \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{1}{\frac{R}{Z} + 1} = \frac{1}{1 + \frac{RCp}{1+LCp^2} + 1} \Rightarrow \boxed{H_A(p) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{LC} + p^2}{\frac{1}{LC} + \frac{R}{2L}p + p^2}}$$

On pose alors classiquement : $\boxed{\frac{1}{LC} = \omega_0^2}$ et $\frac{R}{2L} = 2\zeta\omega_0 \Rightarrow \boxed{\zeta = \frac{R}{4} \sqrt{\frac{C}{L}}}$,
CQFD.

2. Les courbes de Bode de la fonction de transfert sont illustrées par la Fig. 15.42.

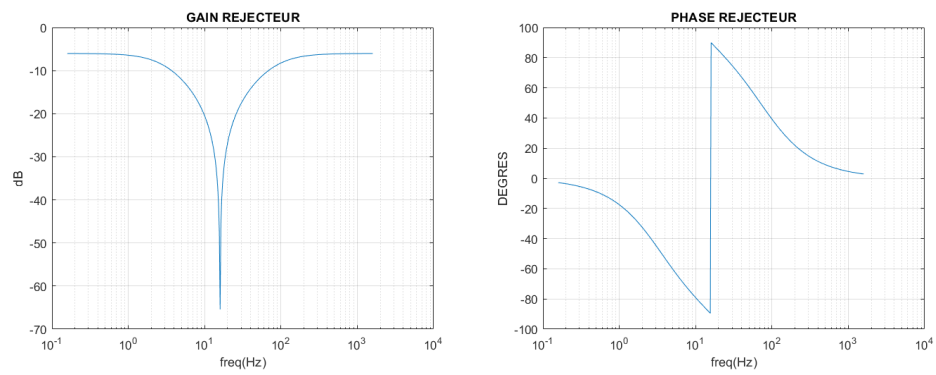


FIGURE 15.42 – Courbes de Bode d'un filtre réjecteur du 150 Hz.

Chapitre 16

Solution des TD et TP

16.1 Programme simulateur des exercices

Ce programme est un simulateur des exercices du chapitre 13. Il est écrit avec la version de logiciel Matlab R2023b. Il demande au départ à l'utilisateur de choisir le numéro de l'exercice à simuler, puis fournit les résultats, soit dans des figures, soit dans la fenêtre de commande. Il est utile pour illustrer certains calculs lors de séances de TD avec les étudiants.

```
1 clear all; clc; close all;
2 exo=input('choix exercice (No.1 a 89 [default=74]) =? ');
3 if isempty(exo), exo=74; end
4 if exo==2, %complexe ABC(circuit RLC)
5   A=5; B=1; C=0.001; Xmax=1000; x=(0.1:0.001:Xmax);
6   Z=A+i.*(B.*x-1./(C.*x));
7   mod=abs(Z/A);
8   loglog(x,mod)
9   grid, xlabel('x'), ylabel('|Z|'),
10  title(['A=',num2str(A),';B=',num2str(B),';C=',num2str(C)])
11 elseif exo==6, %fractions
12   F1=[1 -3 2]; RacineF1=roots(F1)
13   RacineF2=roots([4 4 5])
14   RacineF3=roots([1 -3 3])
15   RacineF4=roots([1 -4 4])
16 elseif exo==12, %suite homographique
17   t=[0:0.01:4.1];
18   for(i=1:size(t,2))
19     f(i)=(3*t(i)-1)./(t(i)+1);
20   end
```

```

21  plot(t,f,t,t), grid, axis([0 4.1 -0.1 2.5])
22  xlabel('t'), ylabel('y'), title('SUITE HOMOGRAPHIQUE')
23  elseif exo==13, %suite fibonacci
24  a0=1; a1=2; N=19; A(1)=a0; A(2)=a1;
25  for (i=2:N)
26  A(i+1)=A(i)+A(i-1);
27  end
28  fibona=A
29  plot(A), grid, title('SUITE DE FIBONACCI'), xlabel('n')
30  elseif exo==21, %serie k/2k
31  N=17
32  k=(1:N);
33  u=k./(2.^k)
34  Sn=sum(u)
35  Rn=2-Sn
36  R10=2*u(11)
37  elseif exo==28, %onduleur
38  T=1; N=100; Te=T/N;
39  tau=Te:Te:(N-1)*Te/2;
40  x=pi*tau/T;
41  cox=cos(x);
42  N=17; Num=0;
43  for k=1:floor(N/2),
44  Num=Num+(cos((2*k+1)*x)/(2*k+1)).^2;
45  end
46  Num=sqrt(Num);
47  D=Num./cox;
48  Nmax=sqrt(pi^2/8-1)
49  Dmax=Nmax./cox;
50  D0approx=sqrt(pi^2/8-1-1/9)/cos(pi/6)
51  %co0=cos(3*pi*tau0/T) %Verif
52  plot(tau,D,tau,Dmax,'r'), axis([0 0.5 0 3])
53  grid, title('ONDULEUR: taux de distorsion')
54  xlabel('0<tau<T/2'),
55  ylabel('Distorsion (-> harm 17) et majorant')
56  elseif exo==35, %propagation de virus
57  t0=0; t5=5;
58  p0=0.1; p5=0.5; %OU: %p0=20; p5=40;
59  y0=1/p0; y5=1/p5;
60  B=1/100;
61  K=y0-B

```

```

62  a=-log((y5-B)/K)/(100*t5)
63  t=(0:1:40);
64  y=K*exp(-100*a*t)+B;
65  subplot(2,1,1), plot(t,y), grid,
66  title('PROBA INVERSE'), ylabel('y=1/p')
67  p=1./y;
68  subplot(2,1,2), plot(t,p), grid, xlabel('JOUR'),
69  title('VIRUS (PROBA p)'), ylabel('TAUX DE CONTAMINATION')
70  elseif exo==51, %diffusion chaleur
71  D=1; n0=1;
72  x=(-5:0.1:5);
73  t=[0.1; 0.5; 2];
74  for i=1:size(t,1)
75      fxt=n0/(2*sqrt(pi*D*t(i)))*exp(-x.^2/(4*D*t(i)));
76      plot(x,fxt), hold on
77  end
78  title('DIFFUSION DE LA CHALEUR'), grid, xlabel('Espace x')
79  ylabel('Température f(x,t) à 3 instants'), hold off
80  elseif exo==74 %pompe a pistons
81  t=(-2*pi:.01:2*pi);
82  q1=sin(t); q1=q1.*(sign(q1)+1)/2;
83  q2=sin(t+2*pi/3); q2=q2.*(sign(q2)+1)/2;
84  q3=sin(t+4*pi/3); q3=q3.*(sign(q3)+1)/2;
85  Q3=q1+q2+q3;
86  f2=sin(t+pi/2); f2=f2.*(sign(f2)+1)/2;
87  f3=sin(t+pi); f3=f3.*(sign(f3)+1)/2;
88  f4=sin(t+3*pi/2); f4=f4.*(sign(f4)+1)/2;
89  Q4=q1+f2+f3+f4;
90  subplot(2,1,1)
91  plot(t,q1,t,q2,t,q3,t,Q3,'k','LineWidth',2),
92  grid, xlabel('t'), ylabel('Q3=q1+q2+q3')
93  title('POMPE A 3 PISTONS')
94  subplot(2,1,2)
95  plot(t,q1,t,f2,t,f3,t,f4,t,Q4,'k','LineWidth',2),
96  grid, xlabel('t'), ylabel('Q4=q1+f2+f3+f4')
97  title('POMPE A 4 PISTONS'),
98  elseif exo==75, %lavinias
99  t=(0:.01:5);
100  x=exp(-t); y=exp(-3*t);
101  n0=1-x;
102  f1=x+y;

```

```

103  f2=x-y;
104  plot(t,f1,t,f2,t,n0),grid, title('CUVEE LAVINAS')
105  xlabel('temps (s)'), ylabel('NIVEAUX n0, f1 et f2')
106  elseif exo==76, %sinus amorti
107  a=0.2; w=1;
108  t=(0:.001:20);
109  f=exp(-a*t).*cos(w*t);
110  plot(t,f),grid, title('SINUSOIDE AMORTIE')
111  xlabel('temps (s)'), ylabel('f(t)=exp(-at)cos(wt)')
112  elseif exo==79, %EDLCC 2eO par TL
113  syms t positive
114  syms p B Y
115  B=laplace(5*exp(-2*t),p)
116  Y=solve(p^2*Y +4*p*Y +3*Y==B,Y);
117  Y=simplify(Y), pretty(Y)
118  y=ilaplace(Y,t);
119  y=simplify(y), pretty(y)
120  elseif exo==80, %DSF dents de scie
121  N=500;
122  T=2; A=4;w=2*pi/T;
123  t=(0:0.01:3*T);s=0;
124  for n=1:N
125  s=s+(-1)^n/n*sin(n*w*t);
126  end
127  s=-A/pi*s;
128  figure(1), plot(t,s), grid,
129  title('DENTS DE SCIE'),xlabel('t')
130  ylabel(['DSF approxime avec N=',num2str(N)])
131  elseif exo==88, %correlateur analogique
132  A=1;T=5;f0=10;e=.01;Te=0.001;fc=.2;tau=.1;
133  wc=2*pi*fc; w0=2*pi*f0; phi=atan(2*f0/fc);
134  g0=A^2/2;
135  t=(0:Te:T);
136  x=A*cos(w0*t); gx=g0*cos(w0*t);
137  gtau=g0*cos(w0*tau); y=gtau+g0*cos(2*w0*(t-tau/2));
138  figure(1), subplot(2,1,1), plot(t,x,t,gx,t,y)
139  grid on, axis([0 .4 -1.5 +1.5])
140  xlabel('temps(s)'); ylabel('amplitude');
141  title('CORRELATEUR ANALOGIQUE')
142  h=wc*exp(-wc*t);
143  z=gtau+g0*(1/sqrt(1+4*f0^2/fc^2))*cos(2*w0*(t-tau/2)-phi);

```



```

144 unit=ones(size(t));
145 z1=gtau*(unit-exp(-(t-tau)*wc));
146 subplot(2,1,2), plot(t,h,t,z,t,z1);
147 grid on, axis([0 T -0.1 1.25])
148 xlabel('temps(s)'); ylabel('amplitude');
149 elseif exo==89, %filtre RII rejecteur
150 elseif exo==666, %underwork
151 display('TD INTEGRATION:')
152 C=[1 -3/2 -1]; Racines=roots(C)
153 else
154 display('exercice non disponible!')
155 end

```

16.2 Critères et livrables attendus en TP

16.3 Corrigé TP 14.3 Initiation

Le programme principal est donné ci-après. La fonction **sinus.m** se trouve plus loin.

```

1 clear, clc, close all
2 %% Q1 matrice %%
3 M=[2 3 2; 1 2 -3; 3 4 1]; Y=[9;14;16];
4 D=det(M); INV=inv(M)*D
5 A=inv(M), X=A*Y
6 %% Q2 polynome %%
7 P1=[1 -6 12 -8 0 0]; R1=roots(P1)
8 R2=[0 0 1 1 1]; P2=poly(R2)
9 x=(-1:.1:3);
10 y1=x.^5-6*x.^4+12*x.^3-8*x.^2;
11 figure(1), plot(x,y1), grid,
12 title('POLYNOME'), xlabel('x')
13 %% Q3 signal %%
14 [x,t]=sinus(5000,2,10,3);
15 figure(2), plot(t,x), grid,
16 title('SINUS'), xlabel('temps')
17 y=x+5;
18 pause, plot(t,y), grid
19 Moy_Var=[mean(y) var(y)]
20 %% ajout de bruit %%
21 bruit=rand(size(y));

```

```

22 hold on, plot(t,bruit), hold off
23 z=y+bruit;
24 pause, plot(t,z),grid, title('SINUS BRUITE')
25 Moy_Var=[mean(z) var(z)]
26 %% Q4 visualisation %%
27 A=zeros(32);
28 A(10:20,5:15)=ones(11);
29 figure(3),
30 subplot(2,1,1), mesh(A), title('AFFICHAGE 3D')
31 subplot(2,1,2), surf(A)
32 %% image %%
33 Fichier=input('Nom fichier [shannon.jpg] ? ','s');
34 if isempty(Fichier), Fichier='shannon.jpg'; end
35 INFO = imfinfo(Fichier)
36 [IMG,MAP] = imread(Fichier, 'jpg');
37 figure(4), colormap('gray');
38 image(IMG); title('SHANNON.JPG')

```

Les résultats graphiques sont illustrés par la Fig. 16.1.

16.4 Corrigé TP 14.4 DSF

16.4.1 Programme DSF09.m

```

%%%%%% CALCUL DE DSF %%%%%%%%%
clc, clf, clear
%CHOIX DES PARAMETRES:
T=0.06; f=30;dt=.0001;
w=2*pi*f;
t=0:dt:T;
x=square(w*t);
figure(1)
%plot(t,x),grid
y=sin(w*t);
%Pour le CARRE
%y=y+1/3*sin(3*w*t)+1/5*sin(5*w*t) +1/7*sin(7*w*t)+1/9*sin(9*w*t);
N=300
for n=1:N,
    k=2*n+1;
    y=y+1/k*sin(k*w*t);
end

```

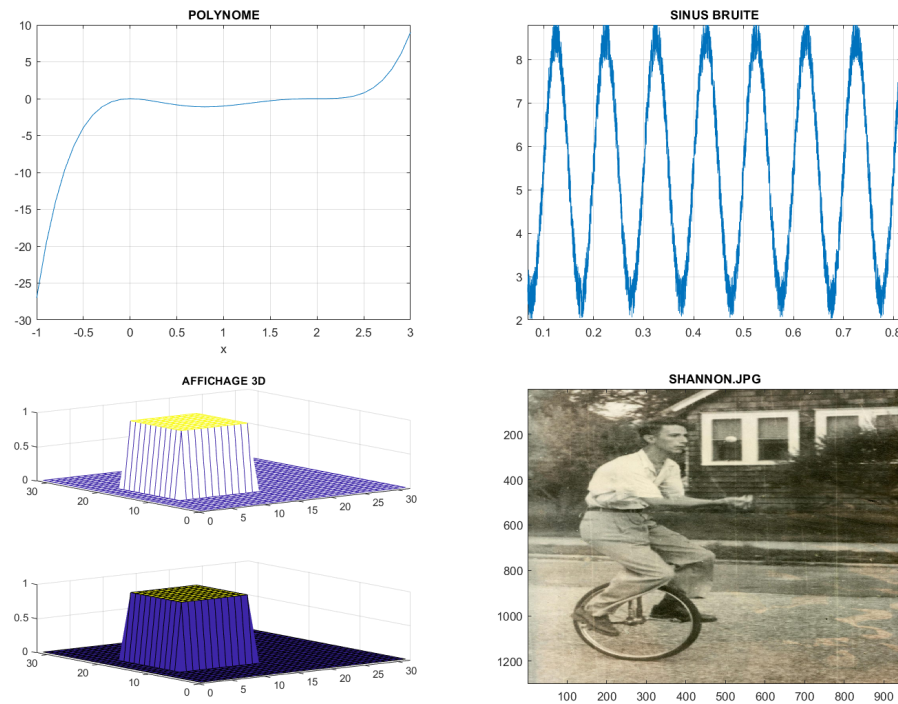


FIGURE 16.1 – Illustration graphique des résultats.

```

y=4/pi*y;
subplot(2,1,1)
plot(t,x,'b',t,y,'k'),grid on,title('DSF du carre')
%hold on
%%Pour le REDRESSEMENT MONO-alternance:
N=5;
A=1.5;
MONO=A/pi+A/2*sin(w*t);
for n=1:N,
    k=2*n;
    MONO=MONO -2*A/pi*(1/(k^2-1)*cos(k*w*t));
end
subplot(2,1,2)
plot(t,MONO,'m'), grid on, title('DSF')
hold on
%%%
%ONDULEUR

```

```

T0=1/f;tau=T0/6;
N=100
t2=tau/2;
ONDU=cos(w*t2)*sin(w*(t-t2));
for n=1:N;
    k=2*n+1;
    ONDU=ONDU+cos(k*w*t2)*sin(k*w*(t-t2))/k;
end
E=1;
ONDU=4*E/pi*ONDU;
subplot(2,1,2)
plot(t,ONDU,'r'), %grid,
hold on
%%%TRIANGLE Positif pair
A=pi;
%T=2*pi;
N=100;
%w=2*pi/T;
TRIANGPLUS=0;
for n=0:N;
    k=2*n+1;
    TRIANGPLUS=TRIANGPLUS+cos(k*w*t)/k^2;
end
TRIANGPLUS=A/2 - 4*A/pi^2*TRIANGPLUS;
subplot(2,1,2)
plot(t,TRIANGPLUS,'g'),grid
%%%
%SIMPLE-ALTERNANCE negatif
A=2;
SAN=0; %A/2*sin(w*t);
N=100;
for n=1:N,
    k=2*n;
    SAN=SAN+cos(k*w*t)/(k^2-1);
end
SAN=A/pi*(-1+2*SAN)+A/2*sin(w*t);
subplot(2,1,2),plot(t,SAN,'b'),grid
%MI-RAMPE f(x)=x puis 0
CO=cos(t);
SI=pi/4;
N=100;

```

```

for n=1:N
    k=2*n+1;
    C0=C0+cos(k*t)/k^2;
    SI=SI-(-1)^n*sin(n*t)/n;
end
ID=SI-2*C0/pi;
subplot(2,1,2)
plot(t,ID,'k'),grid on, title('DSF divers')
%pause %test underwork
test=0; %ou test= 1
if test==1,
N=100;
t1=0:pi/N:pi;
t2=pi:pi/N:2*pi;
t=-2*pi:0.1:2*pi;
f=sin(t);g=sin(t+2*pi/3);h=sin(t+4*pi/3);
f1=sin(t1);
f2=zeros(size(t1));
t3=[t1 t2];
f3=[f1 f2];
figure(2)
subplot(2,2,1),plot(t,f),grid
subplot(2,2,2),plot(t,g),grid
subplot(2,2,3),plot(t,h),grid
subplot(2,2,4),plot(t3,f3),grid,title('UNDER WORK')
end
figure(2),plot(t,ONDU,'r'), grid

```

16.4.2 Résultats

16.5 Solution TP 14.5 Equations différentielles

16.5.1 Programme Matlab

```

1 clear, clc, close all
2 choix=input('choix: 1=RL; 2=EDL2o; [3=RLC]; 4=APER ? ');
3 if isempty(choix), choix=3; end
4 syms t w f R L C E0 I0 positive;
5 syms Ie(t) Ve(t) u(t) e(t);
6 Du=diff(u,t);
7 switch choix

```

```

8 case 1
9 disp('1) CIRCUIT RL')
10 R=2000; L=100e-6; E0=1;
11 tau=L/R, Gain=1/R
12 Ve=E0*t; %%OU BIEN:% Ve=E0*heaviside(t);
13 le=dsolve(L*diff(le,t)+R*le==Ve, le(0)==0);
14 s=simplify(le);
15 fplot(s,[0,5*tau]), title('REPONSE CIRCUIT RL')
16 case 2
17 disp('2) EQUA. DIFF 2EME ORDRE')
18 w0=1;
19 eqn=diff(u,t,2)+2*Du+2*u==sin(w0*t);
20 u=dsolve(eqn,[u(0)==0, Du(0)==0]);
21 s=simplify(u);
22 fplot(s,[0,30]), title('SOLUTION EDL 2e ordre')
23 case 3
24 disp('3) CIRCUIT RLC PARALLELE')
25 R=12000; L=0.01; C=10e-9; I0=3e-3;
26 tau =2*R*C
27 f=input('f=[1kHz] ?'); %CHOISIR: f=0 pour echelon i(t)=I0
28 if isempty(f), f=1000; end
29 w=2*pi*f;
30 le=I0*cos(w*t);
31 DI=diff(le,t); De=diff(e,t);
32 cond=[e(0)==0, De(0)==I0/C];
33 e=dsolve(diff(e,t,2)+1/(R*C)*De+1/(L*C)*e==DI/C, cond);
34 s=simplify(e);
35 le=100*subs(le); DI=subs(DI)/100;
36 xmax=8*tau;
37 fplot(s,[0,xmax]), hold on
38 fplot(le,[0,xmax]), title('REPONSE CIRCUIT RLC')
39 fplot(DI,[0,xmax]), axis([0 xmax -3 3]), hold off
40 case 4
41 disp('4) REGIME APERIODIQUE')
42 cond=[u(0)==E0, Du(0)==0];
43 u=dsolve(diff(u,t,2)+2*Du+u==sin(2*t), cond);
44 s=simplify(u);
45 SOLUTION_SYMBOLIC=s
46 E0=2; disp('A.N.: E0=2')
47 f=subs(s);
48 fplot(f,[-0.5,30])

```

```

49 end
50 grid, xlabel('t')
51 f=subs(s);
52 SOLUTION_FRACTION=f
53 SOLUTION_NUMERIC=vpa(f,3)

```

16.5.2 Résultats graphiques

Les solutions sont illustrées par la Fig. 16.2.

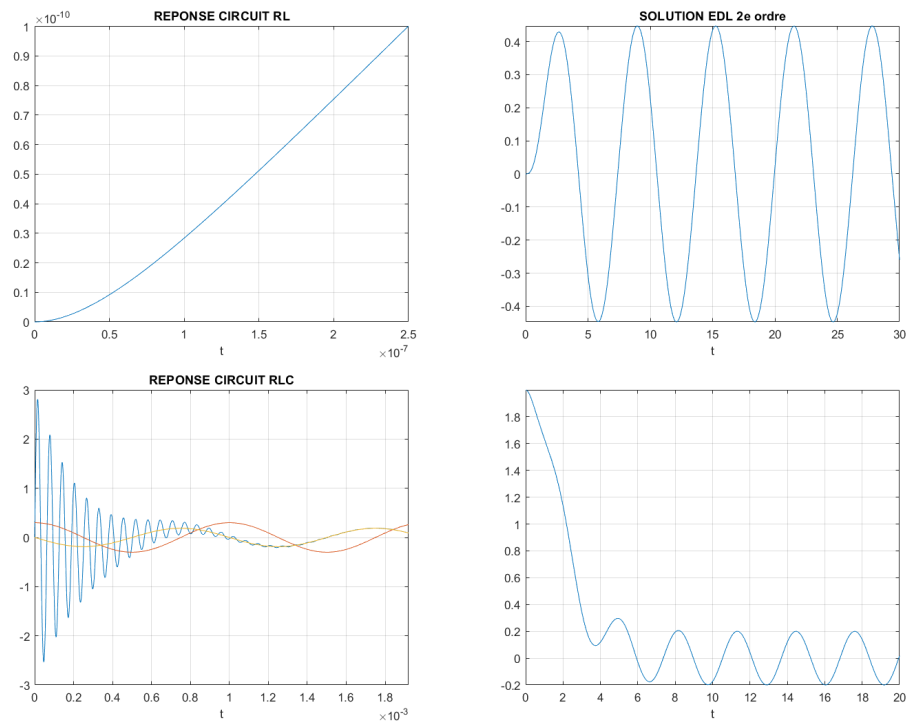


FIGURE 16.2 – Graphes des fonctions solutions.

16.6 Corrigé TP 14.6 TL

16.6.1 Programme Matlab

```

1 clear, clc
2 choix=input('choix: [2] ; 1 ? ');
3 if isempty(choix), choix=2; end

```

```

4  switch choix
5  case 1
6  disp('1) TL DE FONCTIONS USUELLES')
7  syms a s p t w ;
8  syms n positive;
9  L1=laplace(t^n,t,p)
10 L2=laplace(exp(a*t),'t','p'); pretty(L2);
11 L3=laplace(t^n*exp(-a*t))
12 L4=laplace(1/sqrt(t))
13 L4bis=laplace(sqrt(t))
14 L5=laplace(cos(w*t))
15 L6=laplace(sin(w*t))
16 L7=laplace(cosh(a*t))
17 L8=laplace(sinh(a*t))
18 case 2
19 disp('2) EQUA. DIFF 2EME ORDRE')
20 syms s Y;
21 syms t a positive;
22 syms y0 y1 y2 y3 real;
23 %% 1) OK%%Y=solve(Y*(s^2+2*s+1)==s+1,Y)
24 L2=laplace(4*exp(-3*t)*sin(2*t))
25 pretty(L2)
26 %Y=solve(Y*(s^2+6*s+13)-(y1+s*y0+6*y0)==4*2/((s+3)^2+4),Y);
27 Y=solve(Y*(s^2+6*s+13)-(5+s+6)==L2,Y);
28 %3)
29 %Y=solve('(s^4-5*s^2+4)*Y=s^3*y0+s^2*y1+s*y2+y3','Y');
30 %(y2-5*y0)+(y3-5*y1)','Y');
31 Y=simplify(Y)
32 pretty(Y)
33 y=ilaplace(Y);
34 y=simplify(y)
35 pretty(y)
36 %1) AN:
37 %y0=1; y1=5; a= 0.1;
38 %y=subs(y)
39 fplot(y,[0,5]),axis([0 5 -0.5 1.5]),
40 grid, xlabel('temps'), title('SOLUTION')
41 end

```


16.6.2 Solution de l'exercice de TP 14.6.3

$$y_{M526}(t) = \exp(-3t) \left[\frac{9}{2} \sin(2t) + (1-t) \cos(2t) \right]$$

Cette fonction solution est représentée Fig. 16.3.

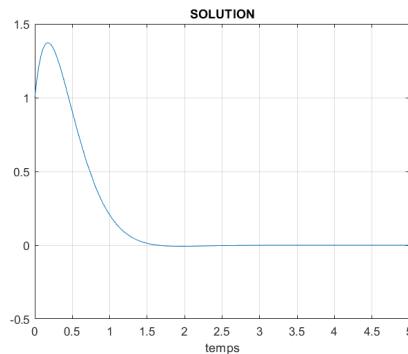


FIGURE 16.3 – Solution d'une EDL2 obtenue par TL.

16.7 Corrigé TP 14.7 FdT

16.7.1 Programme ampliv.m

Solution du TP 14.7.2, p. 251

```

1 %%inspire du PLOTTIN I4 PLO%%
2 clear, clc
3 R=1000; C=1E-6; wc=1/(R*C);
4 W=logspace(-1,+5);
5 B=[1];%*R;%normalisation du gain
6 A=[R*C 1];
7 figure(1); freqs(B,A,W); title('AMPLI NON COMPENSE')
8 k=input('k= [1.51]? NB:k tjs >1 (typ. 1.41 à 1.61)');
9 if isempty(k), k=1.51; end
10 L=C*(R/k)^2
11 B1=[L/R 1];%*R;
12 A1=[L*C R*C 1];
13 figure(2); freqs(B1,A1,W); title('COMPENSATION SHUNT')
14 delta=(R*C)^2-4*L*C
15 k2=input('k2= [1.51]? '); if isempty(k2), k2=1.51; end
16 m=1/3;

```

```

17 B2=[1];%*R;
18 A2=[m/(k2^2*wc^3) 1/(k2^2*wc^2) 1/wc 1];
19 figure(3); freqs(B2,A2,W); title('COMPENSATION SERIE')
20 [H,W1]=freqs(B,A);
21 [H1,W1]=freqs(B1,A1);
22 [H2,W1]=freqs(B2,A2);
23 figure(4); subplot(2,1,1)
24 semilogx(W1,abs(H),W1,abs(H1),W1,abs(H2));
25 grid, title('MODULE'), ylabel('attenuation')
26 deg=180/pi;
27 subplot(2,1,2);
28 semilogx(W1,angle(H)*deg,W1,angle(H1)*deg,W1,unwrap(angle(H2))*deg);
29 grid, title('PHASE'), xlabel('pulsation w'), ylabel('degres')
30 disp('verif:');
31 L=C*(R/k)^2/(1-m)
32 C1=C*(1-m); C2=m*C; C1_C2=[C1 C2]
33 a3=[m/(k2^2*wc^3) R*L*C1*C2]
34 a2=[1/(k2^2*wc^2) L*C1]
35 a1=[1/wc R*C]

```

16.7.2 Résultats graphiques

La Fig. 16.4 illustre les résultats.

16.8 Corrigé TP 14.8 TF

```

1 clear,clc,close all
2 syms t f w;
3 syms W0 F0 positive;
4 %syms A T positive;
5 %% fct propre: gaussienne
6 F1=fourier(exp(-t^2),t,f)
7 figure(1),subplot(2,2,3),fplot(F1),
8 grid, title('TF[GAUSS]=GAUSS'), xlabel('freq(Hz)')
9 %% sinus cardinal: essentiel pour troncature
10 a=2*pi;b=1;
11 g=a*sin(pi*f)/(pi*f);
12 subplot(2,2,1),fplot(g); title('SINUS CARDINAL')
13 grid, xlabel('freq(Hz)'), axis([-6 6 -a*0.3 a*1.3])
14 F2=b*ifourier(g,f,t);

```

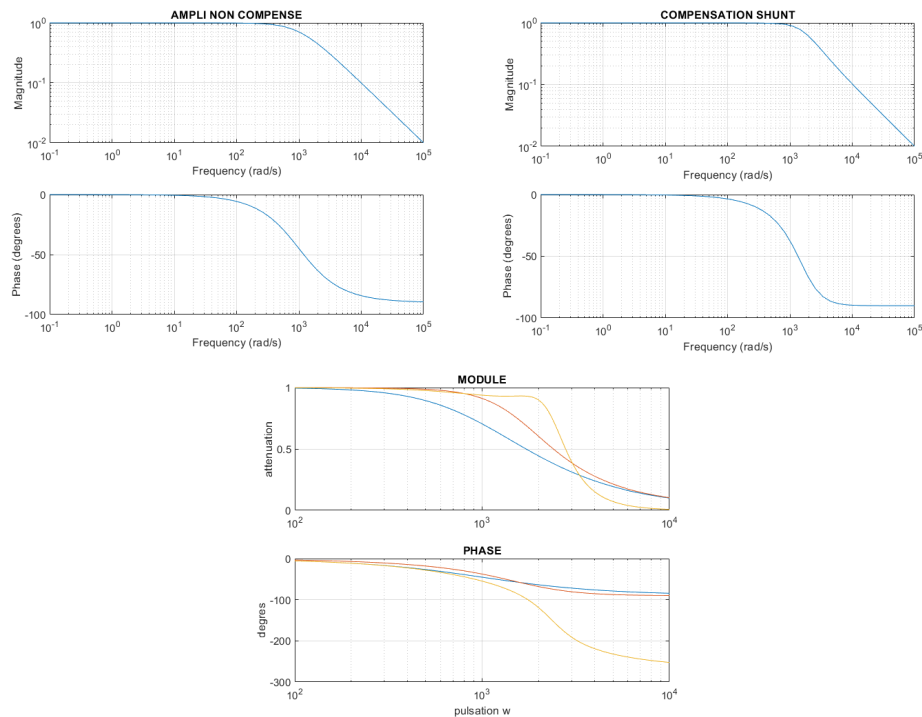


FIGURE 16.4 – Comparaison des filtres.

```

15 F2=simplify(F2)
16 subplot(2,2,2), fplot(F2);
17 grid, title('TFinv[SINC]=PORTE'), xlabel('temps(sec)')
18 %% trigo
19 F3=fourier(cos(2*pi*F0*t),t,f)
20 F4=fourier(sin(2*pi*F0*t),t,f)
21 %F3=ifourier(A*T*sin(pi*T*f)/(pi*T*f),f,t); F3=simplify(F3)
22 %A=1;T=1; F3=subs(F3), figure(2), fplot(F3)
23 %SHANNON %TRONCATURE TEMPORELLE
24 Fe=256;F=100;T=1;A=1;dB='o'; Ne=128; %Ne=1024
25 [signal, tps] = sinus(Fe,T,F,A);
26 N=size(tps,2)
27 [spec, freq] = spectre(Fe,signal,Ne,dB);
28 subplot(2,2,4), plot(freq,spec,'r'),
29 grid, title('TF[SINUS]=DIRAC'), xlabel('freq(Hz)')
30 %[signal, tps] = carre(Fe,T,F,A);
31 %plot(freq(1:Ne/2),spec(1:Ne/2),'g')

```

La Fig. 16.5 illustre les résultats.

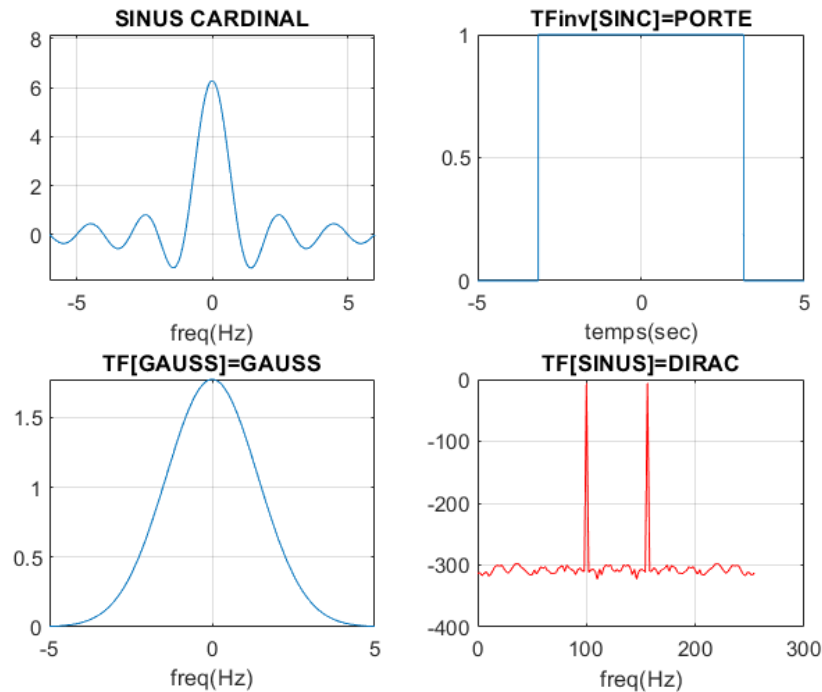


FIGURE 16.5 – Transformées de Fourier.

16.9 Corrigé TP 14.9 TZ

```

1 clear,clc, close all
2 syms n z a;
3 syms Te positive;
4 F=ztrans(exp(a*n*Te),n,z);
5 F=simplify(F)
6 G=iztrans((Te*z)/((z-1)^2),z,n);
7 G=simplify(G)
8 %% pause
9 r=.99; theta=10;
10 %rz=[]; tz=[];
11 rz=.99; tz=30;
12 theta=theta*pi/180;
13 p=r*exp(j*theta);

```

```

14 pole=[p conj(p)]';
15 tz=tz*pi/180;
16 zer=rz*exp(j*tz);
17 zero=[zer conj(zer)]';
18 figure(1), subplot(2,2,1)
19 pzmap(pole, zero), title('PLAN COMPLEXE')
20 zgrid([],[]), axis([-1.3 1.3 -1 1])
21 k=1;
22 [num, den]=zp2tf(zero, pole, k)
23 figure(2), freqz(num, den);
24 [h, w]=freqz(num, den);
25 Fe=1; w=w/pi*Fe/2;
26 magn=20*log10(abs(h)); phase=unwrap(angle(h))*180/pi;
27 figure(1), subplot(2,2,2)
28 semilogx(w, magn), grid, title('GAIN')
29 subplot(2,2,4), semilogx(w, phase); grid, title('PHASE')
30 xlabel('frequence')
31 n=256;
32 x=[1 zeros(1, n-1)];
33 y=filter(num, den, x);
34 figure(1), subplot(2,2,3),
35 plot(y), grid, title('REP.IMPULS'), xlabel('temps')

```

La Fig. 16.6 illustre les résultats.

16.10 Corrigé TP 14.10 Filtrage

```

1 %% (a) et (b) : generation du signal bruité
2 clear, clc, close all
3 N=1000;
4 Dt=1/N;
5 n=0:1:N;
6 t=n*Dt;
7 x=2*pi*t;
8 y=sin(x)+sin(3*x)+sin(8*x);
9 %y=t.^3+sin(8*x);
10 %y=x; %pour stage poubelles
11 b=rand(size(y));
12 b0=mean(b);
13 b=b-b0;
14 z=y+3*b;

```

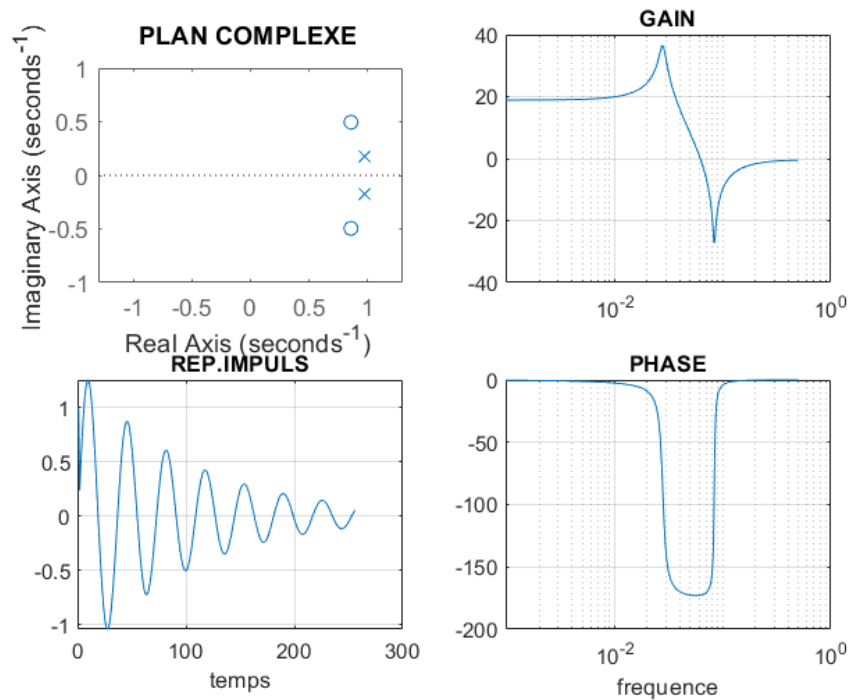


FIGURE 16.6 – Transformées en Z.

```

15 figure(1), subplot(2,2,1)
16 plot(t,z,'g',t,y,'r'); title('y et z'); grid
17 xlabel('temps (s)'); ylabel('amplitude')
18 %% (c) moyennage
19 r=5; Zm=filmoy(z,r);
20 r=20; Zm1=filmoy(z,r);
21 r=50; Zm2=filmoy(z,r);
22 subplot(2,2,2), plot(t,Zm,'b',t,Zm2,'k',t,Zm1,'r')
23 title('Zm (pour r=5;20;50)'); grid
24 xlabel('temps (s)'); ylabel('amplitude');
25 %% (d) filtrage du spectre
26 Ec=15; Zf=filfft(z,Ec);
27 subplot(2,2,3), plot(t,y,'r',t,Zf,'k')
28 title('y et Zf (pour Ec=15)'), grid
29 xlabel('temps (s)'); ylabel('amplitude');

```

La Fig. 16.7 illustre les résultats.

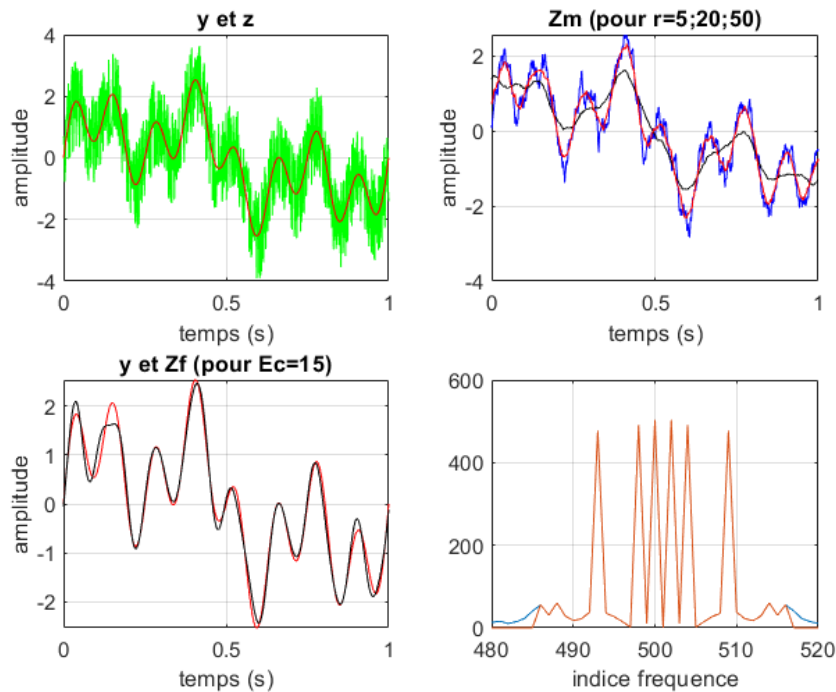


FIGURE 16.7 – Comparaison des filtrages.

16.11 Fonctions appelées

```

1  function [x,t] = sinus(Fe,T,f,A)
2  %% *****
3  %entree:4 param:
4  %Fe=freq echantillonnage ,Tobs,freq signal ,amplitude
5  %sortie:2 vecteurs : x=echantillons , t=vecteur tps
6  %% *****
7  Te = 1/Fe;
8  w = 2*pi*f;
9  t = 0:Te:T;
10 x = A*sin(w*t);

```

```

1  function [x,t] = carre(Fe,T,f,A)
2  %*****
3  Te = 1/Fe;
4  w = 2*pi*f;

```

```

5 t = 0:Te:T;
6 x = A*square(w*t);

```

```

1 function [Sxx,freq] = spectre(Fe,x,N,dB)
2 %*****
3 %*** Calcul de la FFT***
4 z = fft(x,N);
5 %*** Normalisation***
6 Nx=min(N,length(x));
7 Nx=length(x);
8 z=z/Nx;
9 %*** Calcul du spectre***
10 Sxx = abs(z);
11 if dB=='o',
12     Sxx = 20*log10(Sxx);
13 end
14 %*** Calcul des fréquences***
15 Df = Fe/N;
16 freq = Df*(0:(N-1));

```

```

1 function [w,t] = apod(Fe,T,N,type)
2 %*****
3 we=2*pi/(N-1);
4 t0=0:1:(N-1);
5 if type==0,
6     w=ones(size(t0));
7 elseif type==1,
8     w=0.5*(1-cos(we*t0));
9 elseif type==2,
10    w=0.54-0.46*cos(we*t0);
11 elseif type==3,
12    phi=we*t0;
13    w=0.42-0.5*cos(phi)+0.08*cos(2*phi);
14 end
15 Te=1/Fe;
16 tn=N:1:T/Te;
17 w=[w zeros(size(tn))];
18 t=Te*[t0 tn];

```

```

1 %Syntaxe d'appel : Zm=filmoy(z,r)
2 %*****

```



```

3 % fonction de filtrage par moyenne de r valeurs
4 % z est le signal d'entree: vecteur ligne
5 % r est la force du filtre (entier positif)
6 %*****
7 function [out1] = filmoy(z,r)
8 n=length(z); %dimension du vecteur z
9 for i= 1:n,
10 vecteur=[];
11     if (i-r<1)
12         vecteur=[vecteur z(1:i+r)];
13     elseif (i+r>n),
14         vecteur=z(i-r:n);
15     else
16         vecteur=[vecteur z(i-r:i+r)];
17     end
18     zm(i) = mean(vecteur);
19 end
20 out1=zm;%la fonction retourne zm

```

```

1 %Syntaxe d'appel : Zf=filfft(z,Ec)
2 % z =signal en entree (N pair, periode 1)
3 % Ec=indice frequence de coupure
4 function [out1] = filfft(z,Ec)
5 Fz=fft(z);%transformée de fourier discrete de Z
6 Fz=fftshift(Fz);%on centre
7 n=length(z)-1; %dimension du vecteur z
8 for i= 1:n+1,
9     Ei=-n/2+(i-1);
10     if (-Ec<=Ei)&&(Ei<=Ec)
11         Fzt(i)=Fz(i);
12     else
13         Fzt(i)=0;
14     end
15 end
16 %%%% affichage spectres
17 figure(1), subplot(2,2,4)
18 plot(abs(Fz)); grid on
19 hold on
20 plot(abs(Fzt))
21 axis([480 520 0 600]); xlabel('indice frequence')
22 hold off

```

```
23 %on calcule la transformée inverse du spectre tronqué
24 Fzt=ifftshift(Fzt);
25 zf=ifft(Fzt);
26 out1=zf;%la fonction retourne zf
```

Conclusion

La mathématique est un objet exigeant, mais d’une esthétique évidente, qui se révèle à quiconque ose faire l’effort d’y regarder d’un peu plus près, au lieu de décider a priori, ou sous l’influence du groupe social qui l’entoure, que c’est trop dur pour lui, et réservé à une élite d’illuminés hypertrophiés du cerveau !

Comme pour le sport, il faut s’entraîner pour atteindre un niveau satisfaisant et commencer à se faire plaisir : regarder en boucle pendant des heures à la télévision Ben Johnson courir le 100 m n’améliore pas notre performance sportive. De même, c’est la pratique répétée (faire des exercices, et encore des exercices) qui conduit à une certaine maîtrise mathématique, mais certainement pas le simple fait de regarder et écouter passivement son prof de maths, aussi brillant soit-il, faire le pître au tableau et enchaîner les équations¹.

La mathématique (avec la physique) est la clé de la compréhension du monde matériel qui nous entoure, indispensable au développement d’un citoyen conscient dans un monde de plus en plus technologique : utiliser son téléphone portable (bijou de technologie) à longueur de journée, quel que soit l’intérêt de l’usage (loisir, information, santé, lien social, finance, etc.), sans en connaître un minimum sur le fonctionnement des applications sous-jacentes utilisées, en fait un objet magique, et rend alors l’usager soumis, dépendant, voire à la merci des pouvoirs technique ou politique : la technologie ne doit pas devenir une nouvelle religion.

En guise de conclusion, je citerai l’extrait d’un ouvrage portant sur le Big Data [4] (p.146) pour inciter à explorer cette discipline ardue, voire à choisir d’en faire son métier, car la première compétence nécessaire aux nouveaux métiers liés à l’intelligence artificielle est un bon niveau en mathématique : l’analyse de données massives étant basée sur des calculs de corrélation, sur les graphes et la topologie, appliqués aux suites et séries numériques produites à très grande échelle par notre société de plus en plus régie par l’informatique et la cybernétique : “... avec le Big Data ... pour autant qu’ils aient une appétence

1. Tomber amoureux de son/sa prof de maths ou de physique est une autre affaire, qui dépasse le cadre de cet ouvrage.

pour les maths, chacun peut sans crainte conseiller à ses enfants de s'orienter dans ce domaine. Leur avenir est assuré...”

Les ombres sont toutes vraies comme elles paraissent. Toutes les ombres d'un homme expliquent la forme de l'homme, et en même temps la caverne, le feu, et la place même de l'homme enchaîné.

Alain ([1])

En l'honneur de ma mère².

2. Qui, pendant sa scolarité jusqu'au certificat d'études, a toujours préféré les calculs aux dictées.

Bibliographie

- [1] Alain. *Eléments de philosophie*. Folio Essais. Gallimard, Paris, 1941. [364](#)
- [2] Thierry Alhalel, Florent Arnal, and Laurent Chancogne. *Mathématiques IUT 2^e année*. Collection Parcours IUT. Dunod, Paris, 2nd edition, mars 2018. [39](#)
- [3] Mohammed El Amrani. *Suites et séries numériques. Suites et séries de fonctions*. Ellipses, Paris, 2011. [29](#)
- [4] Gilles Babinet. *Big Data, penser l'homme et le monde autrement*. Le Passeur Editeur, 2015. [363](#)
- [5] A. Belage, J. Rouvre, and R. Théodor. *Exercices résolus de mathématiques générales CNAM niveau A*, volume 1. Masson, Paris, 1983. [193](#)
- [6] M. Bellanger. *Traitement numérique du signal. Théorie et pratique*. Masson, Paris, 5^e edition, 1996. [155](#)
- [7] Jean-Claude Belloc and Patrice Schiller. *Mathématiques pour l'électronique*. Masson, septembre 1994. [95](#)
- [8] Pierrette Benoist-Gueutal and Maurice Courbage. *Mathématiques pour la physique. Intégrale de Lebesgue, Fonctions analytiques, Espaces normés*, volume 1. Eyrolles, Paris, 2nd edition, 1994. [129](#)
- [9] G. Blanchet and M. Charbit. *Traitement numérique du signal. Simulation sous Matlab*. Hermès, Paris, 1998. [155](#)
- [10] M. Carbon, D. Ghorbanzadeh, P. Marry, N. Point, and D. Vial. *Eléments de mathématiques du signal. Exercices résolus*. Dunod, Paris, 1997. [129](#)
- [11] Alain Carmasol. *Mathématiques pour les sciences de l'ingénieur avec Mathematica*, volume 2. Cépaduès Editions, Toulouse, juin 2021. [39](#)
- [12] G. Chauvat, A. Chollet, and Y. Bouteiller. *Mathématiques BTS/DUT. Analyse*. EdiScience. Dunod, Paris, 2005. [165](#), [192](#), [198](#), [218](#), [272](#)
- [13] C. Cherruau and F. Cherruau. *Maths BTS groupement B*. Ellipses, Paris, 2005. [41](#)
- [14] C. Cherruau and F. Cherruau. *Sujets corrigés de Mathématiques - BTS groupement A*. Ellipses, Paris, 2010. [41](#)

- [15] M. Chossat and Y. Privat. *Aide-mémoire Mathématiques de l'ingénieur*. L'Usine Nouvelle. Dunod, Paris, 2nd edition, 2010. [218](#)
- [16] H. Collet, B. Girard, and C. Perrier. *Mathématiques, Spécialités du groupement A, BTS industriel*. Nathan, 2002. [224](#), [226](#)
- [17] F. Cottet. *Traitement des signaux et acquisition de données. Cours et exercices résolus*. Dunod, Paris, 1997. [155](#)
- [18] François Cottet-Emard. *Toutes les maths pour bien commencer sa licence en 36 fiches*. Sup en poche. De Boeck Supérieur s.a, Louvain-la-Neuve, 2^e edition, août 2022. [173](#)
- [19] Tearii Cridland. *Panorama des mathématiques du supérieur*. Références sciences. Ellipses Ed. Marketing, Paris, 2022. [85](#)
- [20] Maurice Denis-Papin. *Mathématiques générales*, volume 1 of *Aide-mémoire*. Dunod, Paris, 1962. [261](#)
- [21] K. Devlin. *Les énigmes mathématiques du 3^e millénaire*. Poche. Le Pomnier, Paris, 2007. [31](#)
- [22] V. Dotsenko. *Méthodes mathématiques pour la physique*. Dunod, 2018. [41](#)
- [23] Angela Gammella-Mathieu. *Les mathématiques de l'IUT - Rappels de cours et travaux dirigés corrigés, 1^{re} année*. Références sciences. Ellipses, Paris, 2^e edition, janvier 2022. 444 pages. [165](#)
- [24] Christian Godin. *La philosophie pour les nuls*. First Editions, 2006. [194](#)
- [25] J. Hérault and F. Zadworny. *Formulaire de transformées de Laplace et de Fourier à l'usage des électroniciens*. Reprographie ENSERG, INP Grenoble, 1994. [184](#)
- [26] Abdul J. Jerri. *Integral and discrete transforms with applications and error analysis*. Marcel Dekker, Inc., New York, 1992. [129](#)
- [27] M. Kunt. *Techniques modernes de traitement numérique des signaux*, volume 1, 2 et 3. Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne, 1991. [120](#), [139](#), [155](#), [163](#)
- [28] Yves Leroyer and Patrice Tesson. *Mathématiques pour l'ingénieur. Exercices et problèmes*. collection Sciences sup. Dunod, Paris, février 2009. [39](#)
- [29] F. Liret and D. Martinais. *Mathématiques pour le DEUG, Analyse 1^{re} année. Cours et exercices résolus*. Sciences Sup. Dunod, Paris, 1997. [27](#)
- [30] Henri Lombardi. *Epistémologie mathématique*. Références sciences. Ellipses Ed. Marketing, Paris, 2011. [28](#), [192](#)
- [31] F. Luthon. *Mathématique de l'ingénieur*. Reprographie ENSERG, INPG Grenoble, 1999. Document de cours, 100 pages. [165](#)

- [32] F. Luthon. *Initiation au Traitement d'Images : Contours, Couleurs, Mouvements - Cours, exercices et TP corrigés*. Références Sciences. Ellipses Ed. Marketing, Paris, Sept. 2021. 288 pages, ISBN : 9782340-056749. [5](#)
- [33] Jacques Max and Collaborateurs. *Méthodes et techniques de traitement du signal et applications aux mesures physiques*, volume 1 et 2. Masson, Paris, 4^e edition, 1987. [139](#)
- [34] J-M. Monier. *Analyse I - Cours et 300 exercices corrigés*. Dunod, Paris, 3^e edition, 1999. [27](#)
- [35] M. Najim. *Synthèse de filtres numériques en traitement du signal et des images*. Hermes, Lavoisier, Paris, 2004. [161](#)
- [36] G. Papelier. *Précis d'Algèbre, d'Analyse et de Géométrie*. Librairie Vuibert, Paris, 17^e edition, 1956. (à l'usage des élèves de MathSup et de MathSpé). [27](#)
- [37] Xavier Picamoles. *Fondamentaux de mathématiques appliquées pour ingénieurs et techniciens*. Ellipses, Paris, 2016. [140](#)
- [38] B. Picinbono. *Théorie des signaux et des systèmes avec problèmes résolus*. Dunod, Paris, 1989. [129](#)
- [39] Jean-Marc Poitevin. *Outils mathématiques pour physiciens et ingénieurs : Rappels de cours, 120 exercices corrigés*. coll. Sciences sup. Dunod, Paris, 2nd edition, janv. 2017. [39](#)
- [40] Nicolas Poulain. *LaTeX pour les enseignants*. Références sciences. Ellipses Edition Marketing, Paris, 2020. [5](#)
- [41] Maurice Rivoire and Jean-Louis Ferrier. *Cours d'Automatique : Signaux et Systèmes. BTS, IUT, écoles d'ingénieurs*, volume 1. Eyrolles, Paris, 1995. [155](#)
- [42] Murray R. Spiegel. *Variables complexes, Cours et problèmes*. Série Schaum. Mac Graw Hill, 1984. [129](#)
- [43] Patrick Taquet and Pascale Tirel. *Les mathématiques en BTS industriels*. Ellipses, Paris, 2nd edition, 2016. [120](#)
- [44] Robert Vich. *Z Transform Theory and Applications*. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1987. [129](#)

Glossaire

- A.N.** Application Numérique. [188](#), [203](#), [262](#), [335](#)
- ASCII** American Standard Code for Information Interchange. [240](#)
- BE** Bande Etroite. [148](#)
- BF** Basse Fréquence. [310](#)
- BP** Bande Passante. [139](#)
- CD** Conditions de Dirichlet. [40](#), [43](#), [285](#)
- CI** Condition Initiale. [293](#), [294](#), [299](#)
- CN** Condition Nécessaire. [32](#)
- CNS** Condition Nécessaire et Suffisante. [33](#), [60](#)
- CQFD** Ce Qu'il Fallait Démontrer. [37](#), [77](#), [83](#), [86](#), [339](#)
- CU** Convergence Uniforme. [71](#), [72](#)
- CV** Converge. [32](#), [33](#)
- dB** Décibel. [297](#)
- DDS** Dents De Scie. [283](#)
- DFRES** Décomposition de Fraction Rationnelle en Eléments Simples. [299](#), [317](#)
- DFT** Discrete Fourier Transform. [254](#)
- DIV** Diverge. [33](#)
- DSE** Développement en Série Entière. [36](#), [38](#)
- DSF** Développement en Série de Fourier. [39](#), [40](#), [281](#), [284](#), [286](#), [319](#)
- DSL** Développement en Série de Laurent. [86](#)
- DSP** Densité Spectrale de Puissance. [142](#)
- DST** Développement en Série de Taylor. [73](#)
- e.g.** Exempli Gratia (“Par exemple”, en latin). [260](#)

ED Equation Différentielle. [47](#)

EDL Equation Différentielle Linéaire. [50](#)

EDLCC Equation Différentielle Linéaire à Coefficients Constants. [108](#)

EV Espace Vectoriel. [177](#)

EVN Espace Vectoriel Normé. [32](#)

FdT Fonction de Transfert. [108](#), [260](#)

FFT Fast Fourier Transform. [3](#)

HF Haute Fréquence. [310](#)

i.e. Id Est (“C’est-à-dire”, en latin). [95](#)

INPG Institut National Polytechnique de Grenoble. [374](#)

IUT Institut Universitaire de Technologie. [374](#)

N.B. Nota Bene. [32](#)

PC Personal Computer. [240](#)

PTT Postes Télégraphes Télécommunications. [150](#)

RIF Réponse Impulsionnelle Finie. [161](#)

RII Réponse Impulsionnelle Infinie. [256](#)

SF Série de Fourier. [43](#), [44](#)

SLIT Système Linéaire Invariant dans le Temps. [106](#)

SSI Si et Seulement Si. [68](#), [335](#)

TD Travaux Dirigés. [341](#)

TF Transformée de Fourier. [111](#)

TFD Transformée de Fourier Discrète. [120](#)

TFDT Transformée de Fourier Discrète dans le Temps. [123](#)

TL Transformée de Laplace. [95](#)

TP Travaux Pratiques. [239](#)

TZ Transformée en Z. [130](#)

UC Uniformément Convergente. [76](#)

Index

- Abel, [36](#)
- adjacente
 - suite, [28](#)
- Alembert, [35](#)
- alterné, [35](#)
- analogique, [119](#)
- analyse spectrale, [119](#), [231](#)
- analytique, [73](#)
- apodisation, [125](#)
- arithmétique, [29](#)
- autocorrélation, [332](#)
- avance, [132](#)

- Bernstein, [144](#)
- Bode, [296](#)
- Borel, [105](#)
- Bromwich, [102](#)

- Cauchy, [32](#), [35](#), [71](#)
- causal, [95](#)
- chaleur, [209](#)
- changement de fréquence, [148](#)
- composante continue, [42](#)
- condensateur, [328](#)
- conjugué, [58](#)
- convergence, [28](#)
- convolution, [107](#), [114](#)
- corrélation, [141](#)
- coupure, [65](#)
- croissante, [27](#)

- décibel, [175](#)
- décroissante, [27](#)
- dents de scie, [231](#)

- dérivation, [113](#)
- détermination, [65](#)
- différentielle totale, [49](#)
- Dirac, [107](#), [177](#)
- discontinuité, [41](#)
- distribution, [177](#)
- diverge, [28](#)
- DSF, [40](#)
- dualité, [143](#)

- échantillonnage, [120](#)
- échelon, [97](#)
- énergie, [43](#)
- Euler, [98](#)

- factorielle, [98](#)
- Fibonacci, [193](#)
- filtre, [236](#)
- fonction de transfert, [107](#)
- fondamental, [42](#)
- fraction rationnelle, [61](#)
- fréquence, [112](#)

- Gauss, [118](#)
- géométrie, [30](#), [32](#)
- Gibbs, [41](#)

- Hamming, [125](#)
- Hanning, [125](#)
- harmonique, [32](#), [42](#)
- Heaviside, [97](#), [99](#)
- holomorphe, [73](#)
- homogène, [48](#)
- hyperbolique, [170](#)

- impair, 43
- incertitude, 144
- intégration, 190

- Jordan, 89

- Laurent, 82
- lemme de Jordan, 102
- lemme de Schwarz, 49
- limite, 28
- linéarité, 112

- Mac-Laurin, 73
- majoré, 27
- Mellin-Fourier, 103
- minoré, 27
- modulation, 113, 209
- Moivre, 261
- multiforme, 63
- multiplexage, 149

- numérique, 120

- onduleur, 198
- ordinaire, 62
- original, 95, 291

- pair, 42
- Parseval, 43, 115
- peigne, 118
- périodique, 40
- point critique, 64
- point singulier, 86
- Poisson, 118
- polaire, 49
- polynôme, 61
- pondération, 125
- propre
 - fonction, 117
- puissance, 143
- quantification, 120
- radar, 235

- raison, 29, 32
- rayon de convergence, 37
- réalisable, 146
- récurrente, 29
- redressement, 198
- régulier, 68
- réjecteur, 337
- repliement, 121
- résidu, 84
- retard, 113, 132
- Riemann, 34, 65, 71

- Schwarz, 62
- séparable, 48
- série entière, 37
- Shannon, 119, 121
- somme partielle, 29, 31
- spectre, 119
- stable, 146
- suite, 27
- symbolique
 - calcul, 95
 - variable, 95

- Taylor, 73
- terme général, 27
- transformée de Fourier discrète, 120
- triangle, 329
- troncature, 123

- uniforme, 63
- univalente, 61

- valeur efficace, 43
- valeur finale, 133
- valeur initiale, 133
- virus, 202

- Wallis, 289
- Weierstrass, 71
- wronskien, 52

- Z
 - transformée en, 130

Référencement

Résumé pour libraires (4-5 lignes)

Mots-clés

Fourier, fréquence, intégrale, Laplace, série, Shannon, signal, spectre, transformée, Z.

Contenu :

Cet ouvrage comporte une première partie de cours sur les outils mathématiques de l'ingénieur (utiles au traitement de signal, ainsi qu'à l'électronicien), suivie d'une seconde partie applicative avec une centaine d'exercices et sujets de travaux pratiques de programmation, accompagnés de leurs corrigés succincts.

Lectorat :

Ce livre s'adresse aux étudiants en science et technologie de niveau Licence, ou aux élèves-ingénieurs de toutes disciplines, ainsi qu'à tout enseignant souhaitant disposer d'un manuel de cours contenant des sujets d'exercices et travaux pratiques de programmation, à proposer à ses étudiants.

4e de couverture (1800 caractères)

Présentation

Les mathématiques sont souvent répulsives pour une majorité d'étudiants. Ici donc, le choix est fait de fournir très peu de démonstrations rébarbatives, mais juste l'essentiel des résultats à mettre dans une boîte à outils d'étudiant en génie électrique, bachelor d'IUT ou élève-ingénieur.

Cet ouvrage comporte une première partie de cours sur les maths du signal, suivie d'une centaine d'exercices et sujets de travaux pratiques de programmation accompagnés de leurs corrigés.

Il s'adresse à un public d'étudiants de niveau L3 ou master M1 en science et technologie ou d'élèves-ingénieurs de toutes disciplines, avec une connaissance minimale en mathématiques du signal, et des compétences informatiques de base en programmation. Il concerne aussi tout enseignant souhaitant disposer d'un manuel regroupant des sujets d'exercices et de programmation, avec les solutions, à proposer à ses étudiants.

Biographie

Franck Luthon, ingénieur-docteur diplômé de l'[INPG](#) Grenoble, est professeur à l'Université de Pau et Pays de l'Adour. Il a créé et dirigé le département de génie industriel de l'[IUT](#) de Bayonne, avant de devenir directeur de cet IUT en 2021. Il enseigne, en IUT et en master, l'automatique, l'électronique, les mathématiques du signal et le traitement d'images. Il encadre des recherches en vision par ordinateur et systèmes électroniques.