ANALYSE VIBRATOIRE

Franck Luthon

Franck.Luthon@univ-pau.fr

Dpt Génie Industriel
IUT Bayonne-Pays Basque, 2 Allée du Parc Montaury, 64600 Anglet

www.iutbayonne.univ-pau.fr/∼luthon/anavib0.pdf [1]

24 novembre 2020

1. Ce document peut être reproduit sous réserve d'en citer la source.

Table des matières

1 CM ANAVIB **5**
1.1 Rappel de mécanique vibratoire . . . 5
1.2 Analogie électrique . . . 6
1.3 Capteurs . . . 6
1.4 Chaîne de mesure . . . 9
1.4.1 Rôle . . . 9
1.4.2 Conditionneur de capteurs source de charge . . . 9
1.4.2.1 Convertisseur charge-tension . . . 9
1.4.3 Conditionneur de capteurs résistifs . . . 10
1.4.3.1 Montage 4 fils . . . 10
1.4.3.2 Pont de Wheatstone . . . 10
1.5 Analyse vibratoire . . . 10
1.5.1 Indicateurs scalaires globaux . . . 10
1.5.2 Traitement de Signal : Analyse spectrale . . . 11
1.5.2.1 Paramètres importants . . . 11
1.5.2.2 Fond de Spectre . . . 12
1.5.2.3 Cepstre . . . 12
1.5.3 Analyse modale : Calcul de valeurs propres . . . 13
1.6 Exemples . . . 14
1.6.1 Good Vibs . . . 14
1.6.2 Résonateur de Helmholtz . . . 14
1.6.3 Amortisseur de Frahm . . . 14
1.6.4 Equilibrage . . . 15
1.6.5 Bruit de roulement . . . 15
1.6.6 Dalle de béton . . . 15

2 TD ANAVIB **19**
2.1 Oscillateur excité par un signal carré : DSF . . . 19
2.2 Résolution fréquentielle pour signal bruité HF : TFD . . . 20
2.2.1 Rappels sur la TFD . . . 20
2.2.2 Analyse spectrale avec Matlab . . . 20
2.2.3 Etude d'un signal complexe de vibrations . . . 20
2.2.4 Annexes : listings Matlab . . . 20
2.3 Annexe 1 : Courbes Canoniques du 2eme Ordre . . . 22
2.4 Sujet 2015 (30mn) - Résonateur de Helmholtz . . . 24
2.5 Sujet 2016 (30mn) . . . 24
2.6 Sujet 2017 (30mn) - Etude fréquentielle . . . 25
2.7 Sujet 2018 (30mn) - Analyse fréquentielle . . . 26
2.8 Sujet 2019 (30mn) - Analyse fréquentielle . . . 27
2.9 Sujet 2020 (30mn) - Analyse fréquentielle . . . 28
2.10 Sujet ALT 2020 (30mn) - Résonateur double . . . 30

Chapitre 1

CM ANAVIB

1.1 Rappel de mécanique vibratoire

L'oscillateur linéaire élémentaire [1] : position x, masse m, amortisseur c ($N/M.s^{-1}$), ressort k (N/m), force f en régime forcé (e.g. régime harmonique : $f(t) = F_0 \cos \omega t$) :

— Régi par une EDL2 à coefficients constants :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx(t) = f(t)$$

— oscillations : libre, forcé, harmonique, périodique, amorti ou non ...

— pulsation propre : $\omega_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$

— coefficient d'amortissement : $\lambda = \frac{c}{2m}$;

— amortissement relatif (ou facteur d'amortissement) : $\zeta = \frac{\lambda}{\omega_0} \Rightarrow \boxed{\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}}}$

— pseudo-pulsation : $\omega_p = \omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$

— pulsation de résonance d'amplitude : $\omega_r = \omega_0\sqrt{1-2\zeta^2}$

— pulsation de résonance d'accélération : $\omega_a = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-2\zeta^2}}$.

On a : $f_r < f_p < f_0 < f_a$

— fondamental f_0 (p.ex. gamme 1 à 50Hz), harmoniques nf_0 (cf. cas de la corde vibrante)

— Transmissibilité = Fonction de Transfert du 2e ordre de l'Automatique (cf. Transformée de Laplace) :

$$X_0 = \frac{F_0}{k}\frac{1}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + 2\zeta\frac{\omega}{\omega_0}j} \tag{1.1}$$

— Discussion suivant la valeur de ζ (>1 ,$=1$, <1) : réponse indicielle amortie, critique, ou pseudo-oscillatoire

Fig.0 (à compléter) Réponse indicielle

Fig. Réponse harmonique

1.2 Analogie électrique

L'analogie Force-Courant est la plus commode : un oscillateur se comporte comme un ciruit RLC parallèle (Fig. 1.1).

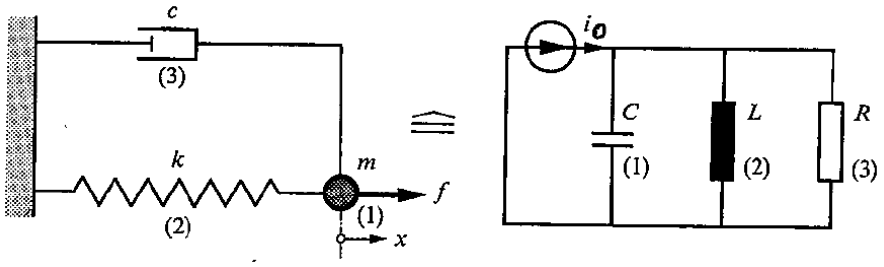


FIGURE 1.1 – Analogie force-courant : une force agit sur la masse.

On considère le courant i dans la self et le flux : $\Phi = Li$

$$LC\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{L}{R}\frac{di}{dt} + i(t) = i_0(t) \Rightarrow C\frac{d^2\Phi}{dt^2} + \frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt} + \frac{1}{L}\Phi(t) = i_0(t)$$

$$m = C \tag{1.2}$$

$$c = \frac{1}{R} \tag{1.3}$$

$$k = \frac{1}{L} \tag{1.4}$$

— Le déplacement correspond au flux : $x = \Phi$
— Une force imposée correspond à un générateur de courant : $f = i_0$.
— Un déplacement imposé (générateur de vitesse) correspond à un générateur de tension : $v = u$

1.3 Capteurs

Pour mesurer les vibrations, il existe des capteurs d'effort, de position, de vitesse, angulaire, des jauges de déformation.

On présente ici quelques capteurs classiques : l'extensomètre, le tachymètre et l'accéléromètre [2]. Ils capturent respectivement un déplacement, une vitesse et une accélération.

Un capteur est caractérisé principalement par sa sensibilité $s = \frac{\Delta S}{\Delta m}$ (rapport de la sortie sur le mesurande) mais aussi par sa linéarité, sa bande passante, ses grandeurs d'influence, son étendue de mesures etc. Le mode de fixation d'un capteur (vissé, collé, aimanté, tenu en main) a une incidence considérable sur sa bande passante Fig. 1.2 [3].

— **Jauge d'extensométrie** : ce sont des éléments résistifs soit métalliques, soit semi-conducteurs (cf. Fig.1.3a). On les fixe à un support isolant mince collé à l'endroit de la structure dont on veut connaître la déformation (ou bien associé à un corps d'épreuve) :

$$\frac{\Delta R}{R} = K\frac{\Delta l}{l}$$

où K est le facteur de jauge (selon le type : $K = 2$ à 4 ; ou $K = \pm 50$ à ± 200)
Précautions (car capteur résistif) : autoéchauffement (Joule, limiter le courant), fils de liaison avec éloignement (montage 4 fils, ou pont de Wheatstone), résistance d'isolement par rapport à la masse (humidité, pollution) : $> 10^6 \times R_{capteur}$.

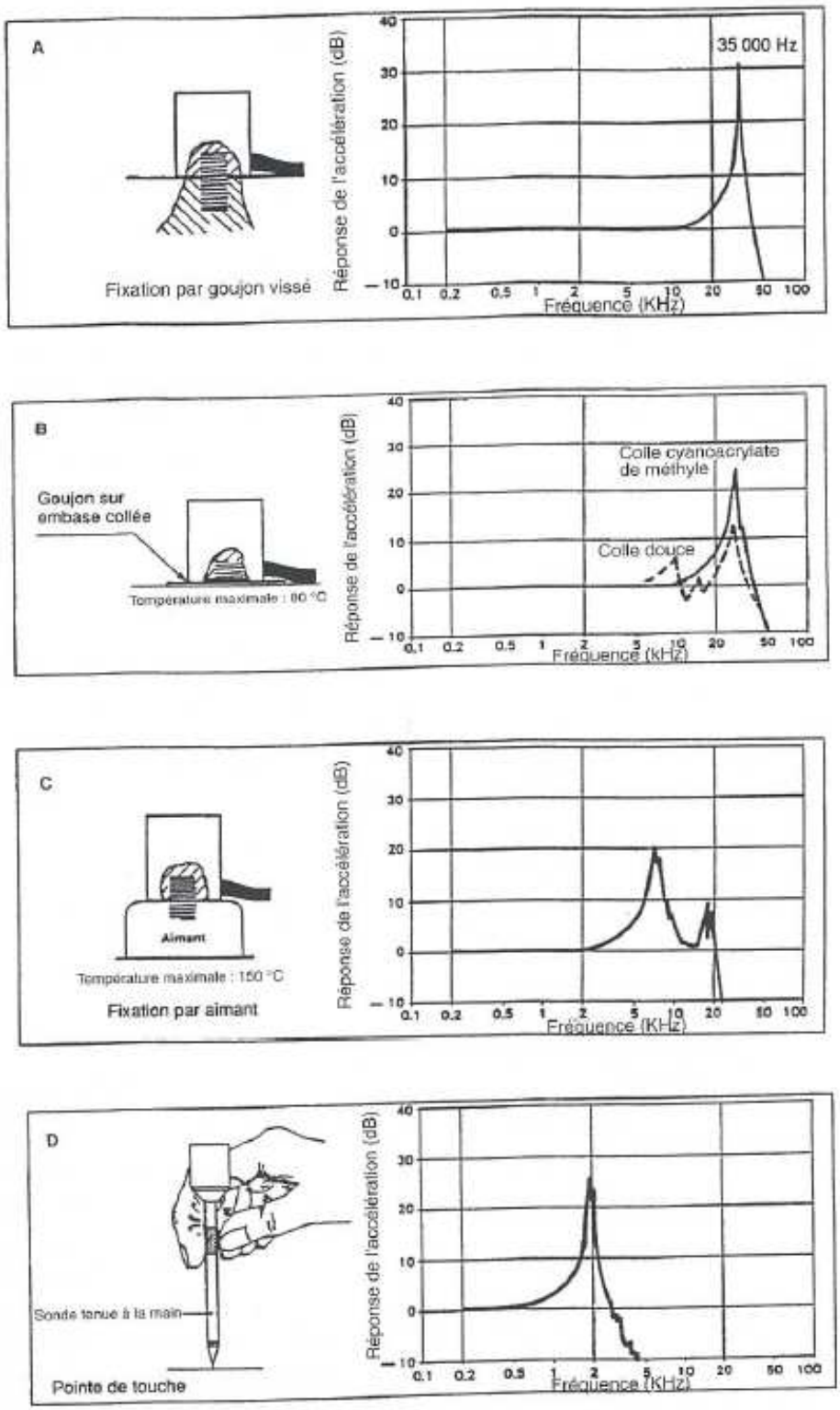


FIGURE 1.2 – Incidence de la pose sur la bande passante d'un accéléromètre.

— **Génératrice tachymétrique** à courant continu : capteur électromagnétique fournissant une f.é.m. E (recuillie sur 2 balais) proportionnelle à la vitesse angulaire ω :

$$E = \frac{\omega}{2\pi}\frac{p}{a} n \Phi_0$$

où n est le nombre de conducteurs sur le rotor connectés en $2a$ voies d'enroulement en parallèle, $2p$ est le nombre de pièces polaires du stator, Φ_0 est le flux issu du pôle inducteur (cf. Fig.1.3b)

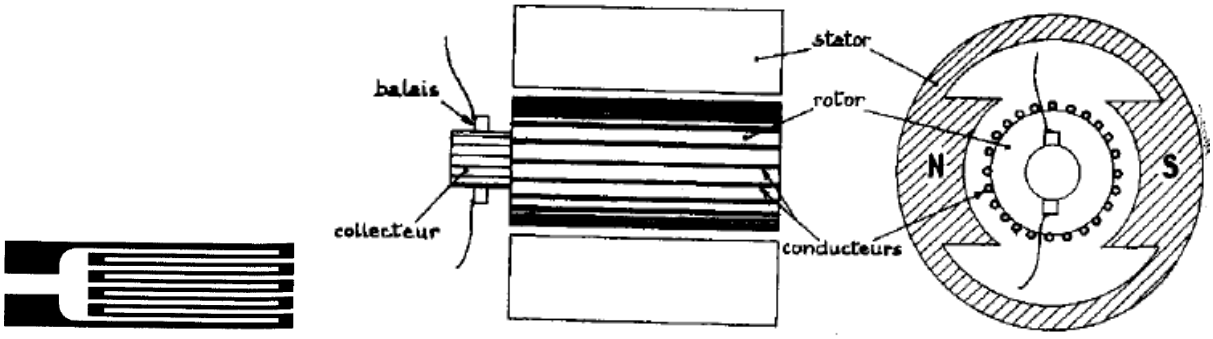


FIGURE 1.3 – a) Jauge extensométrique b) Génératrice tachymétrique

NB : il existe aussi des **tachymètres optiques**.

— **Dynamomètre et accéléromètre à quartz** (capteur générateur de charge) : une force normale appliquée aux faces d'une lame de quartz génère des charges :

$$Q = d.F$$

où $d = 2.13 \times 10^{-12} C/N$ est le module piézoélectrique.
Pour avoir un accéléromètre piézoélectrique, il faut traduire l'accélération en force. Ceci est obtenu au moyen d'une masse M dite sismique qui, soumise à l'accélération Γ, développe une force $F = M\Gamma$ (cf. Fig. 1.4)

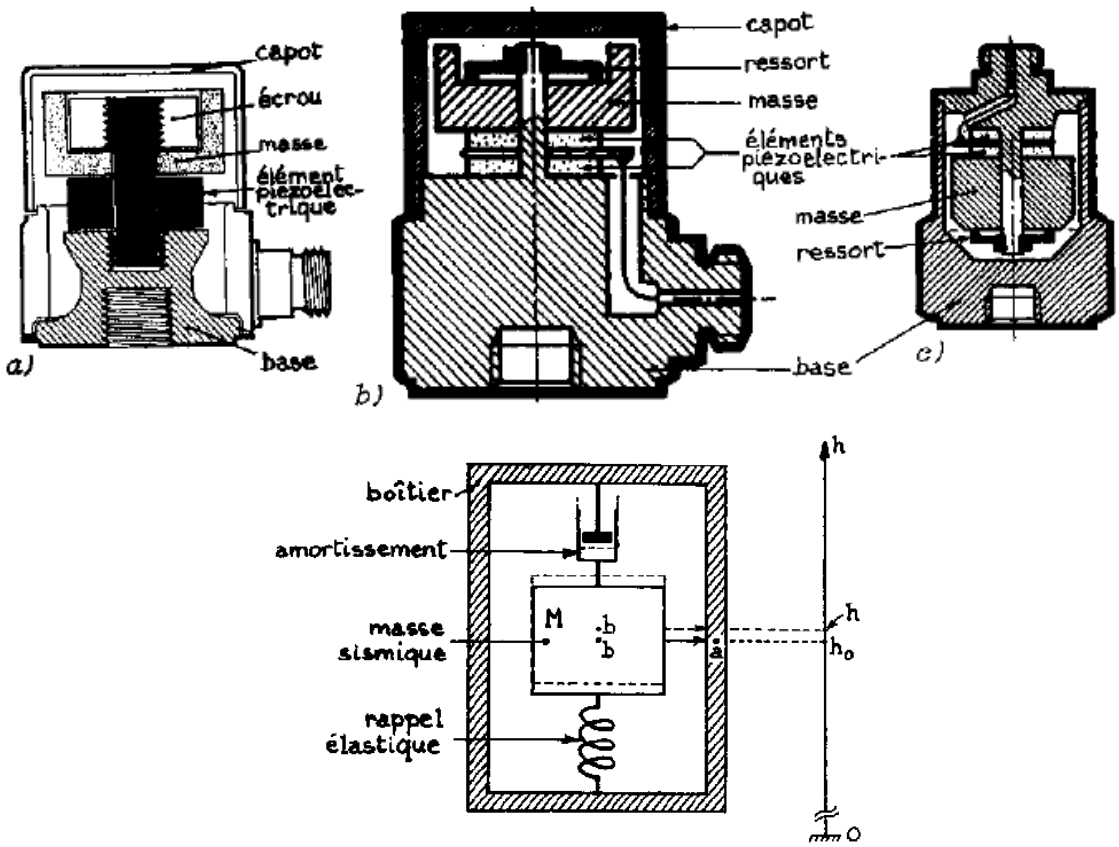


FIGURE 1.4 – a-b-c) Coupes d'accéléromètres piézoélectriques ; d) Principe d'un capteur de mouvement à masse sismique.

— **capteur intelligent** : en plus du conditionnement/amplification/CAN, il est doté de capacités de calcul interne et de communication bidirectionnelle : très utile pour la maintenance préventive (autosurveillance, contrôle à distance, historique des mesures stockées).

1.4 Chaîne de mesure

1.4.1 Rôle

Une chaîne de mesures remplit plusieurs rôles [4] : Conditionnement de signal (conversion de la sortie du capteur en tension), Linéarisation, Adaptation d'impédance, Amplification, Filtrage, Transmission (NB : On peut faire des télémesures par fréquence porteuse), CAN en vue de traitement sur PC, ...

1.4.2 Conditionneur de capteurs source de charge

1.4.2.1 Convertisseur charge-tension

$\boxed{v_0(t) \approx -q(t)/C}$ (cf. Fig. 1.5a). En pratique (Fig. 1.5b), on a : $V_0(p) = -\frac{Q(p)}{C}\frac{RCp}{1+RCp}$ (avec une fréquence de coupure très basse : $F_c = \frac{1}{2\pi RC} \approx 3Hz$).

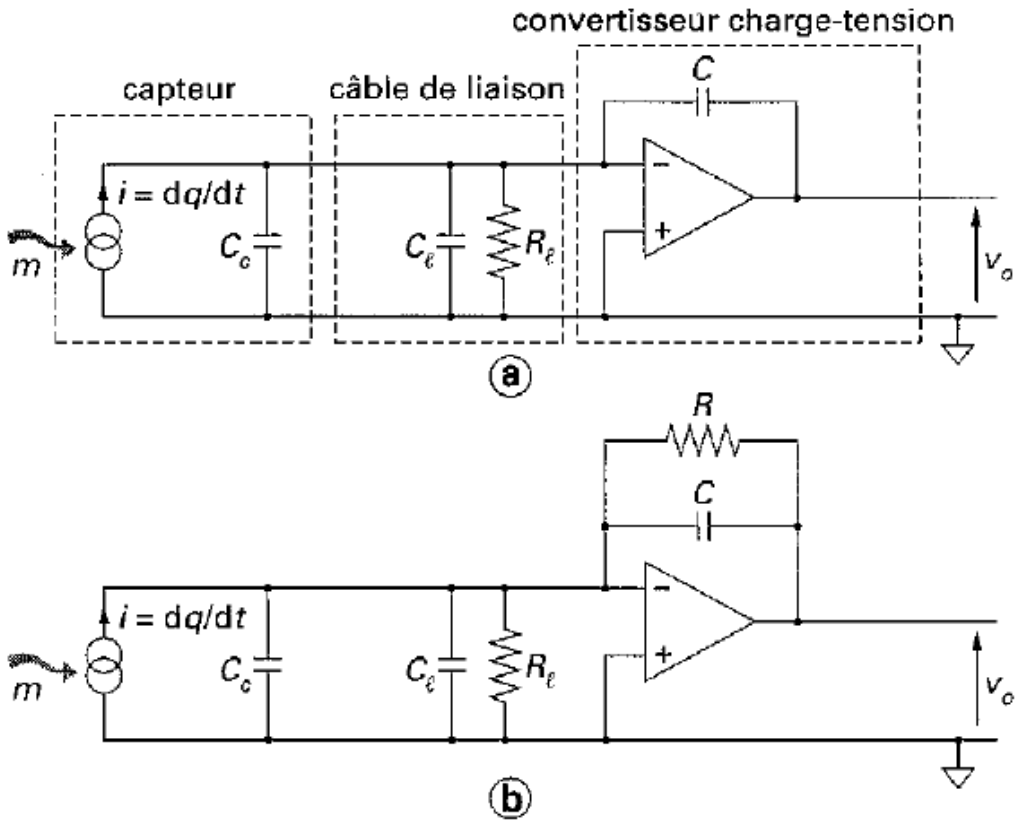


FIGURE 1.5 – Convertisseur charge-tension : a) principe ; b) montage réel (typ. $R = 10^8\Omega$, $C = 500pF$).

Montage à AOP intéressant pour réduire l'influence des impédances du capteur et des fils de liaison (C_c, C_l, R_l). En effet, l'entrée négative étant une masse virtuelle, aucun courant n'est dévié dans C_l, R_l.

1.4.3 Conditionneur de capteurs résistifs

1.4.3.1 Montage 4 fils

cf. Fig. 1.6

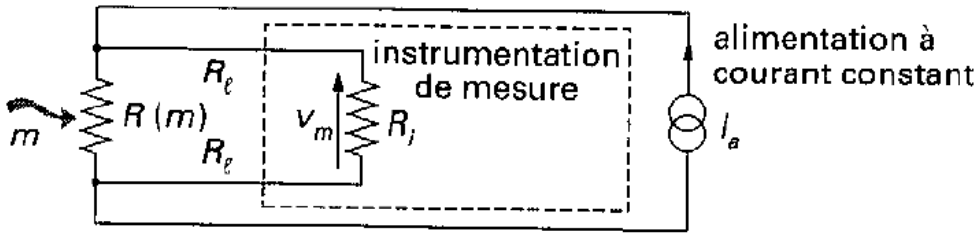


FIGURE 1.6 – Mesure de résistance par montage 4 fils

$$v_m = \frac{R(m)R_i}{R(m) + R_i + 2R_l} I_a \approx R(m) I_a$$

si $R_i >> R_l$ et $R_i >> R(m)$.

1.4.3.2 Pont de Wheatstone

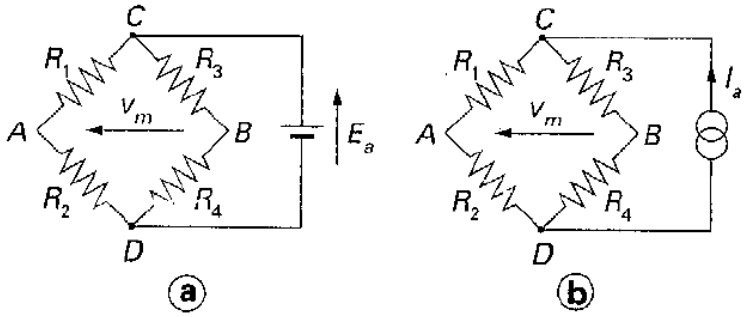


FIGURE 1.7 – Pont de Wheatstone alimenté : a) en tension ; b) en courant

Equations du pont alimenté en tension (cf. Fig. 1.7a) :

$$v_m = E_a \frac{R_2 R_3 - R_1 R_4}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}$$

On prend : $R_1 = R_3 = R_4 = R_0$ et $R_2 = R_0 + \Delta R$. Alors : $v_m = 0$ à l'équilibre (càd quand $\Delta R = 0$). Sinon, on obtient une tension de mesure de déséquilibre :

$$v_m = \Delta R \frac{E_a}{4R_0}$$

1.5 Analyse vibratoire

1.5.1 Indicateurs scalaires globaux

On peut caractériser un signal par sa valeur moyenne $\bar{s}$, son énergie, sa puissance, son amplitude crête S_{crete}, sa valeur efficace S_{eff}, son facteur de crête $FC = S_{crete}/S_{eff}$, son facteur

$K = S_{crete} \times S_{eff}$, ou son kurtosis (moment d'orde 4) :

$$S_{kurt} = \frac{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{k=N}(s_k - \bar{s})^4}{S_{eff}^4}$$

Ces indicateurs scalaires énergétiques permettent une surveillance assez limitée (cf. effet de masque quand le signal en fonctionnement normal est de forte énergie).

1.5.2 Traitement de Signal : Analyse spectrale

L'analyse spectrale [5], grâce aux analyseurs de spectres analogiques ou numériques, permet de connaître les fréquences présentes dans un signal.

— Dans les machines tournantes : on a $f(Hz) \propto N$ où $N = \frac{\omega}{2\pi}$ est la vitesse de rotation
— Dans les véhicules, le moteur est source de vibrations périodiques : la source en mouvement émet un signal sinusoïdal de fréquence f_0 et d'amplitide A_0 constante (rayonnement acoustique).
— Mais aussi : f aléatoire (dans les fluides) ou instabilité.
— Par exemple, pour une machine tournante dont le rotor est guidé par des liaisons fluides (coussinets à huile ou à air), les amplitudes des fréquences comprises dans $0.3N < f < 0.6N$ doivent être très faibles, sous peine d'instabilité destructrice.
— Pour lutter contre les vibrations, ou peut agir sur : la fréquence f (décaler vers BF ou HF), l'amplitude A (amortir) ou la phase ϕ (opposer).

Pour l'étude des vibrations mécaniques (des machines et des structures), les analyseurs de spectre à FFT, qui calculent une TF discrète à partir d'échantillons du signal temporel, sont d'usage courant [6]. Le spectre d'amplitude est souvent étalonné en unités d'accélération g, donc le spectre de puissance est étalonné en unités de g^2.

Le spectre d'une machine tournante est parfois appelé sa **signature**.

Le suivi des harmoniques renseigne sur l'évolution du système (dérive constatée, maintenance préventive).

L'analyse du bruit acoustique (vibrations sonores) est importante pour le contrôle de l'environnement.

Un spectre de fréquences permet de reconnaître les vibrations dues aux :

— balourds
— engrenages
— effets électromagnétiques ($100Hz$ pour alternateur délivrant du $50Hz$)
— roulements à bille
— effets de sillage dans le fluide d'une turbomachine
— défauts d'alignement des liaisons d'un rotor
— instabilité d'un rotor sur ses liaisons (phénomène anormal à supprimer).

1.5.2.1 Paramètres importants

— Fréquence d'échantillonnage F_e (respect du **théorème de Shannon**) :

$$F_e = \frac{1}{T_e} \geq 2F_{max}$$

Sinon : problème de **repliement de spectre** (à cause de la périodisation spectrale tous les F_e, due à l'échantilonnage temporel tous les T_e).

— Résolution fréquentielle Δf liée à la durée d'observation T_{obs} (inversement proportionnelle) :

$$\Delta f \propto \frac{1}{T_{obs}} \text{ où : } T_{obs} = N_e \times T_e$$

— Bande de fréquence BP ;
— Dynamique d'amplitude.
— Importance du calcul d'incertitude (cf. fixer des seuils de tolérance)

1.5.2.2 Fond de Spectre

L'enveloppe du fond de spectre résulte de la somme de 3 composantes : fluctuations aléatoires de l'amplitude de la grandeur mesurée, bruit de la chaîne d'acquisition (quantification etc.) et bruit d'analyse (résolution etc.) Si les 2 derniers bruits sont négligeables, le fond de spectre peut renseigner sur la grandeur physique intéressante [3].

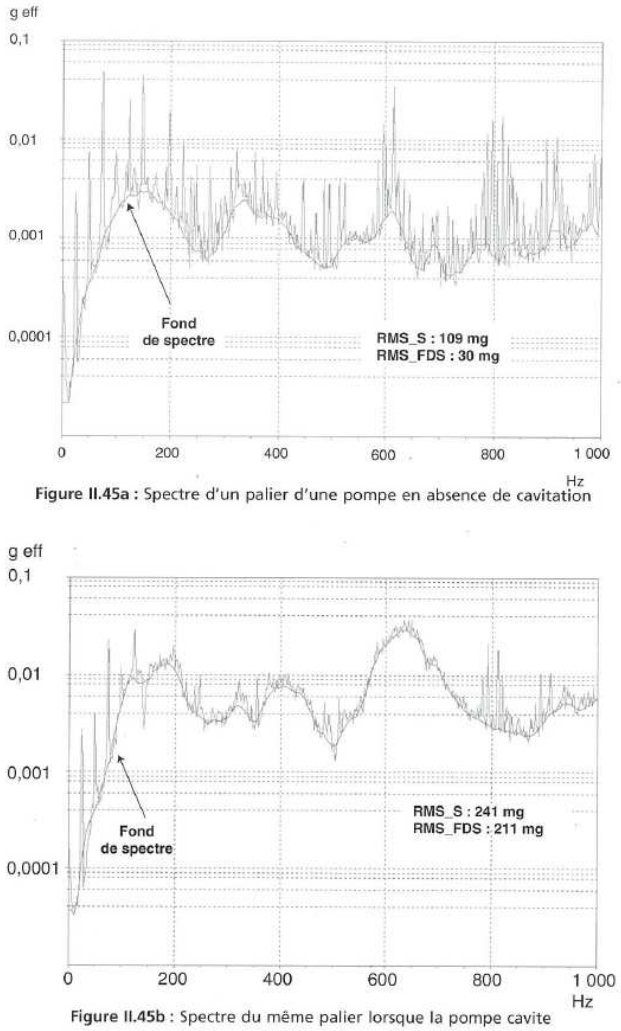


FIGURE 1.8 – Evolution d'un fond de spectre

1.5.2.3 Cepstre

Le cepstre, anagramme du mot spectre, est la transformée de Fourier inverse du logarithme de la transformée de Fourier directe du signal :

$$C[s(t)] = C(\tau) = TF^{-1}[\log_{10} TF[s(t)]]$$

La variable τ, analogue à un temps, s'appelle la quéfrence, anagramme du mot fréquence.

L'intérêt du cepstre d'un signal vibratoire est qu'il permet de dissocier en une somme de 2 fonctions l'influence de la réponse implusionnelle de la structure et celle des forces d'excitation :

$$s(t) = h(t) * e(t) \longrightarrow C[s(t)] = C[h(t)] + C[e(t)]$$

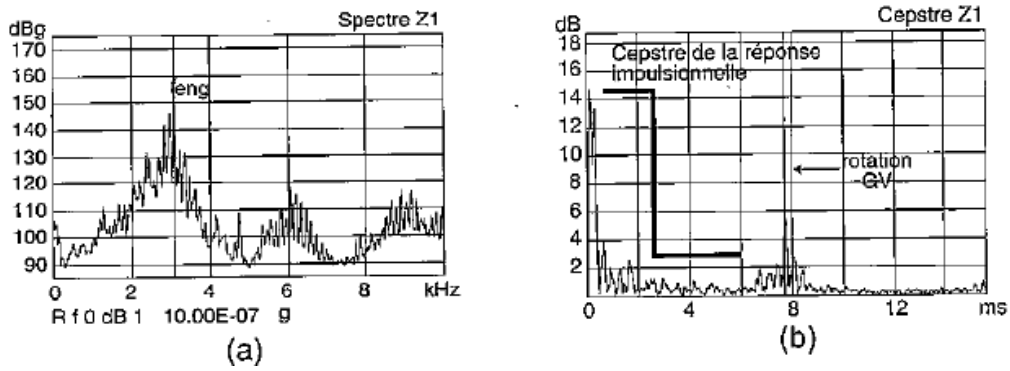


FIGURE 1.9 – Cepstre

1.5.3 Analyse modale : Calcul de valeurs propres

Soient n points d'une structure susceptible de vibrer, et une (ou plusieurs) direction(s) suivant laquelle le mouvement est observé. En supposant la linéarité, on a :

$$M\frac{d^2X}{dt^2} + C\frac{dX}{dt} + K.X(t) = F(t)$$

avec : M, C et K les matrices des masses, resp. amortissements, resp. raideurs, d'ordre (n, n) ; X et F les matrices des déplacements, resp. des forces appliquées, d'ordre $(n, 1)$. La transformée de Laplace de la relation conduit à :

$$W(p)X(p) = F(p) \text{ avec : } W(p) = Mp^2 + Cp + K$$

$W(p)$ est la matrice des fonctions de transfert d'ordre (n, n). On en déduit : $X(p) = W^{-1}(p)F(p)$. La matrice $V = W^{-1}$ contient les caractéristiques (fréquences et modes propres) qui permettent de décrire, par les n points et directions choisis, le comportement vibratoire de la structure. On parle de modèle de la structure. Il suffit de connaître les valeurs propres et vecteurs propres de V.

NB : les fréquences propres peuvent être complexes, et les modes propres définis par le mouvement des n points peuvent comporter des points nodaux (amplitude nulle pour certaines fréquences).

En pratique ($p = j2\pi\nu$), on détermine expérimentalement la matrice $V(j2\pi\nu)$ en imposant des excitations (forces) de types différents :

— aléatoires (bruit dans une bande fixée)
— transitoires (chocs)
— harmoniques (sinusoïdes).

Le terme $V_{lm}(j2\pi\nu)$ de la l-ième ligne et m-ième colonne de la matrice V est déterminé par transformée de Fourier du l-ième terme de la matrice X et du m-ième terme de la matrice F. On a : $V_{lm} = \frac{S_{X_l F_m}}{S_{X_l X_l}}$, le numérateur représentant un interspectre de puissance, et le dénominateur un autospectre, tous deux calculés par une TF des signaux temporels $x_l(t)$ et $f_m(t)$ moyennés (pour réduire le bruit).

Cette méthode est rendue possible par les puissants algorithmes de discrétisation (interpolation, *curve fitting*) désormais disponibles sur ordinateur (cf. calcul d'éléments finis).

1.6 Exemples

1.6.1 Good Vibs

On distinguer les vibrations utiles : appareils où il s'agit d'optimiser le rendement et le type de vibrations utiles sans fatigue exagérée des organes :

— bourreuses-nivelleuses pour entretien voies SNCF
— vibreurs mécaniques et ultrasoniques
— transporteurs à vibrations
— polisseuses
— lithotripteur médical (pour fragmenter les calculs rénaux)

... des vibrations nuisibles :

— machines tournantes (imprécision, bruit, usure, fatigue, fissure, rupture, dissipation d'énergie nuisible au rendement),
— véhicules (tangage, instabilité des ailes avion, inconfort, insécurité),
— structures métalliques (pont, catastrophes).

1.6.2 Résonateur de Helmholtz

On peut calculer la fréquence propre des oscillations d'une colonne de gaz contenue dans un tube dont les extrémités débouchent respectivement dans un milieu indéfini à pression constante p_0 et dans un récipient indéformable (Fig. 1.10).

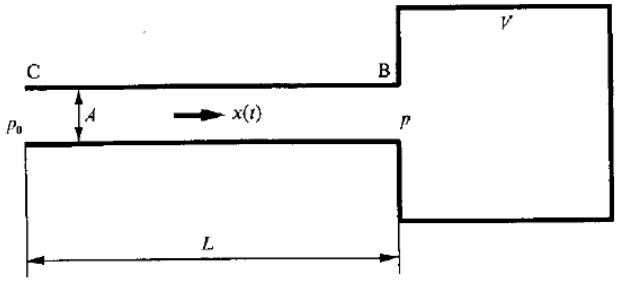


FIGURE 1.10 – Résonateur de Helmholtz

Un tel système est un oscillateur élémentaire, sous les hypothèses suivantes : la variation de pression est bien plus faible que la pression moyenne $|p_0 - p| << p_0$, le volume du tube est bien plus faible que celui du récipient : $L \times A << V$. On montre que :

$$f_0 = \frac{a}{2\pi}\sqrt{\frac{A}{LV}}$$

où $a = \sqrt{\gamma R T_0}$ est un coefficient fonction de la température, avec $\gamma = 1.4$ pour l'air.

1.6.3 Amortisseur de Frahm

Il permet d'atténuer les vibrations mécaniques, sur une gamme de fréquences déterminée. Il comporte un système oscillant auxiliaire, dissipatif ou non, adjoint au système principal, augmentant ainsi le nombre de degrés de liberté et donc de résonances. L'atténuation des vibrations du système principal est obtenue par transfert de celles-ci sur le système auxiliaire aux fréquences désirées. cf Fig. 1.11

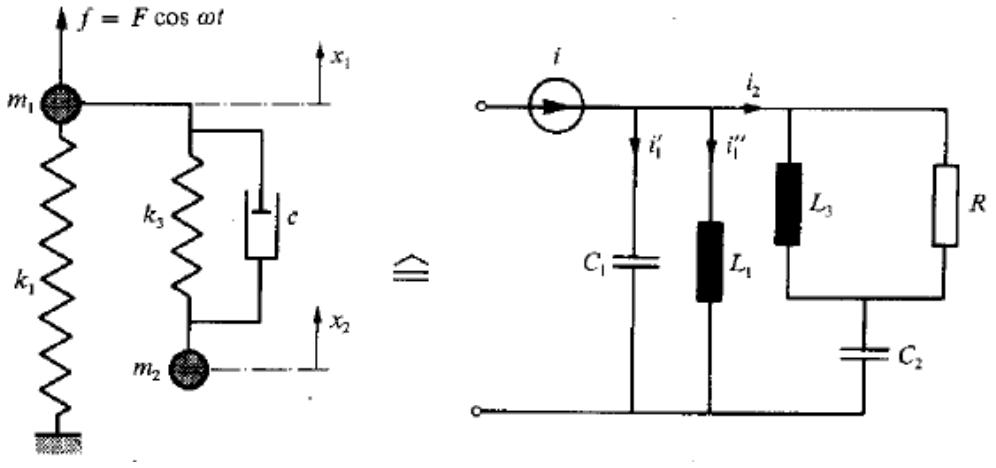


FIGURE 1.11 – Amortisseur de Frahm

Pour 2 degrés de liberté, les équations de Newton s'écrivent avec $f(t) = F_0 \cos(\omega t)$:

$$m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} + k_1 x_1 \quad + \quad k_3(x_1 - x_2) + c\left(\frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_2}{dt}\right) = f(t) \tag{1.5}$$

$$m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} \quad + \quad k_3(x_2 - x_1) + c\left(\frac{dx_2}{dt} - \frac{dx_1}{dt}\right) = 0 \tag{1.6}$$

On montre que l'amplitude X_1 du mouvement de la masse principale est donnée par :

$$\left(\frac{X_1}{F_0}\right)^2 = \frac{(k_3 - \omega^2 m_2)^2 + \omega^2 c^2}{((k_1 - \omega^2 m_1)(k_3 - \omega^2 m_2) - \omega^2 m_2 k_3)^2 + \omega^2 c^2 (k_1 - \omega^2 m_1 - \omega^2 m_2)^2}$$

... ce qui montre que ça devient très vite compliqué, d'où le besoin d'étude expérimentale des vibrations, à défaut d'une approche analytique.

1.6.4 Equilibrage

Pour compenser les balourds (qui sont dus à une masse excentrée Δm d'excentricité ε).

Balourd : $b = \varepsilon \Delta m$ générant une force inertielle centrifuge $\Rightarrow F = b\Omega^2$ (où $\Omega(rd/s) = \frac{\pi}{30} N(tr/min)$) : le fondamental f_0 est égal à la vitesse de rotation ; de nombreux harmoniques sont possibles (suivi de la DSF par détecteur calé sur le rotor).

1.6.5 Bruit de roulement

Choix de 4 filtres : importance de la résolution fréquentielle
— fréquences centrales des bandes d'analyse variant par octave
— fréquences centrales des bandes d'analyse variant par tiers d'octave
— largeur de bande $\pm 0.04f$, avec f fréquence centrale (filtre à $\Delta f/f$ constant)
— filtre de largeur de bande constante 2Hz
(cf. Fig. 1.12)

1.6.6 Dalle de béton

L'installation d'un microscope électronique dans un hall d'essais où fonctionnent plusieurs machines (pompes, ventilateurs, ponts roulants, compresseurs ...) nécessite que la dalle de béton destinée à recevoir ce microscope soit isolée des vibrations.

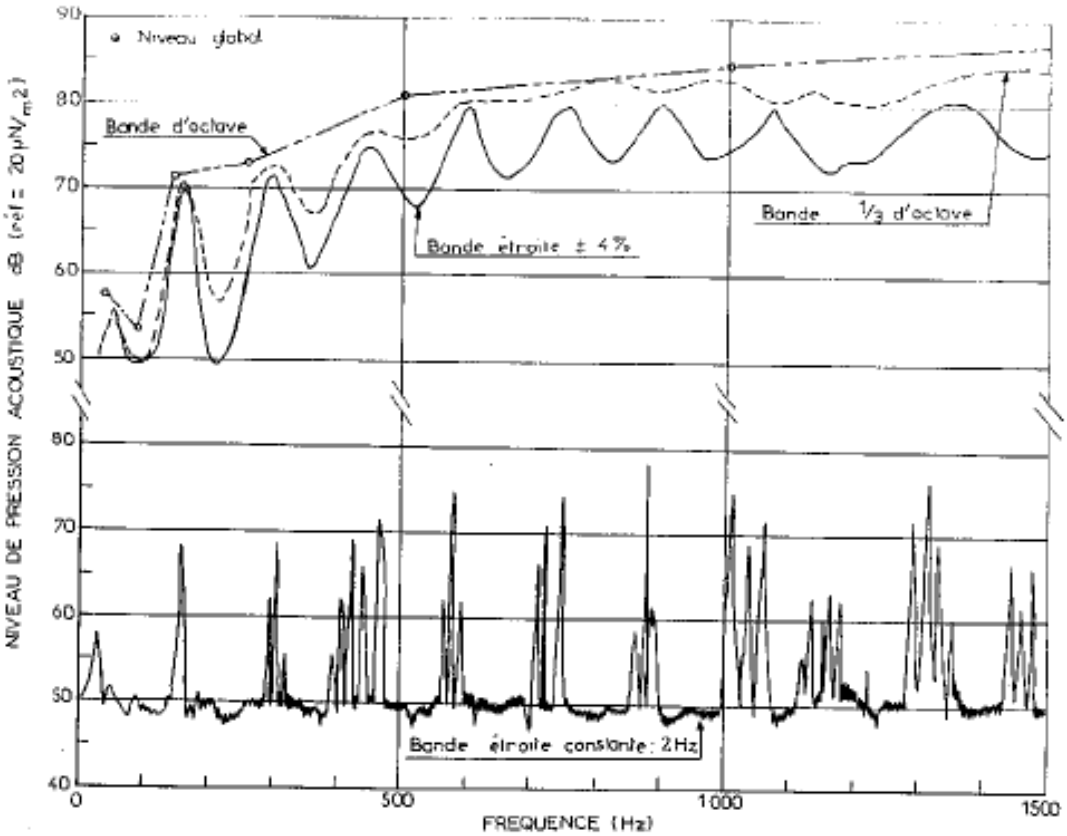


FIGURE 1.12 – Analyse d'un bruit de roulement.

Pour mesurer les vibations, trois capteurs de vitesse, dont on connaît la fonction de transfert, sont disposés suivant $0x$, $0y$ et $0z$. Ils fournissent une tension proportionnelle à la fréquence. La Fig. 1.13b montre l'analyse spectrale, réalisée dans la bande $BP = [0 - 100Hz]$, du signal délivré par le capteur suivant $0x$.

On voit 4 fréquences :

— raie à 80Hz : signal d'étalonnage
— raie à 32.5Hz (déplacement $0.052\mu m$) : ventilateur de puissance
— raie à 6Hz ($0.262\mu m$) : rotation d'une pompe
— raie à 3Hz ($0.376\mu m$) : mouvement du pont roulant

L'analyse spectrale des vibrations permet de :

— mesurer les microdéplacements de la dalle à différentes fréquences
— localiser les sources de vibrations en connaissant ces fréquences.

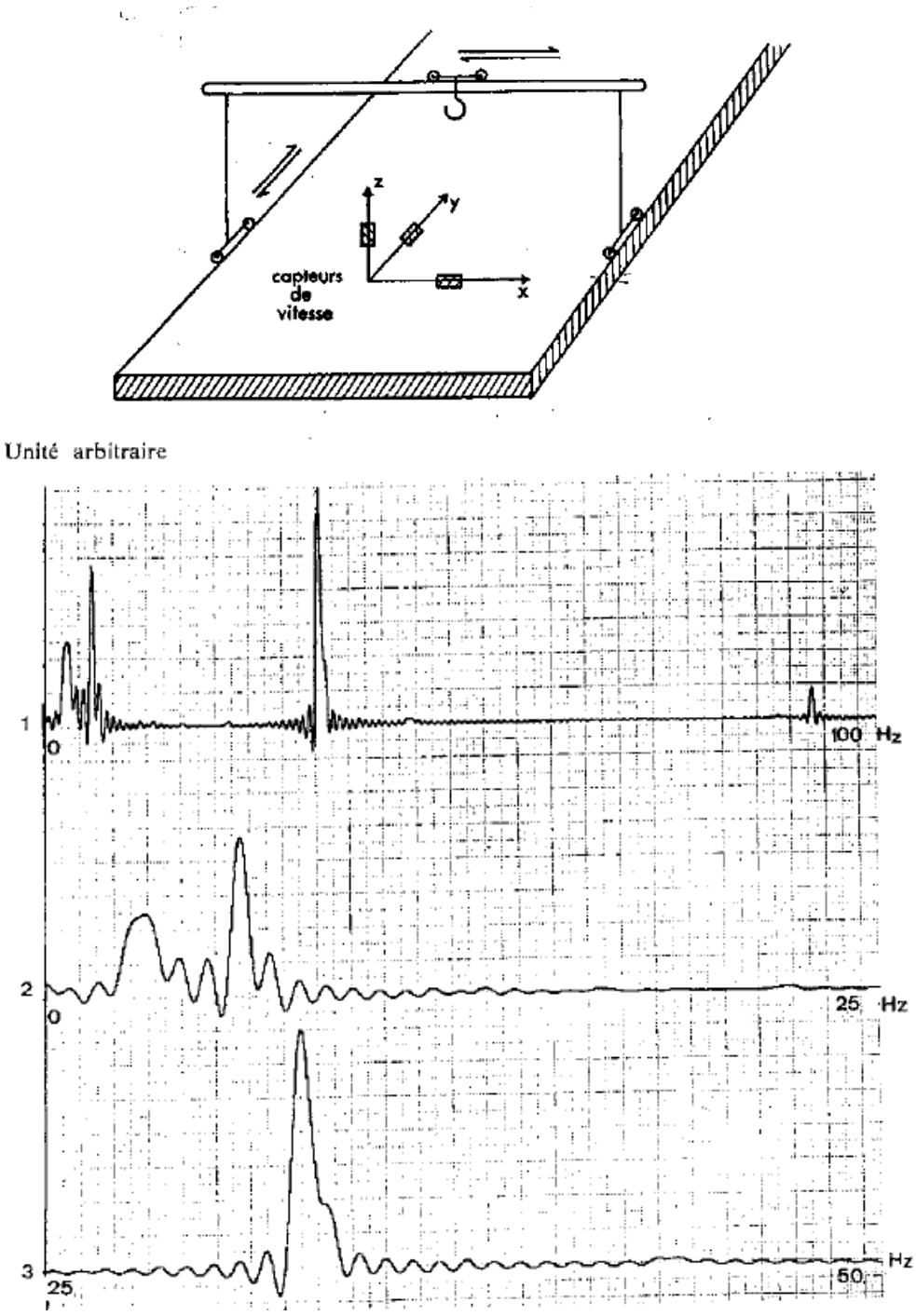


FIGURE 1.13 – a) Dalle ; b) Analyse spectrale .

Chapitre 2

TD ANAVIB

2.1 Oscillateur excité par un signal carré : DSF

Le force extérieure $f(t)$ représentée sur la Fig. 2.1 agit sur un oscillateur élémentaire en régime permanent caractérisé par son facteur d'amortissement $\zeta = 0.05$ et par sa pulsation propre ω_0.

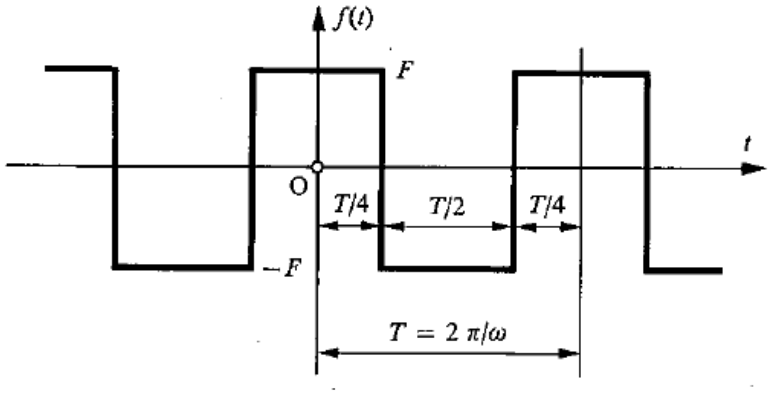


FIGURE 2.1 – Force d'excitation extérieure, rectangulaire périodique.

1. En utilisant le DSF, donner le spectre de $f(t)$, fonction périodique de période $T = 2\pi/\omega$, d'amplitude F, paire et de valeur moyenne nulle.
2. Chercher ensuite le spectre du déplacement $x(t)$ dans les 2 cas suivants : (a) $\omega_0 = 0.8\omega$ (b) $\omega_0 = 5.3\omega$
3. On remplira le tableau Tab. 2.1 jusqu'à l'harmonique d'ordre 13 et on tracera les spectres d'amplitude.

   NB : on note dans le tableau $\delta = \frac{F}{k}$ où k est la raideur du ressort de l'oscillateur (cf. Eq. 1.1).
4. Commentaire : comment se comporte l'oscillateur dans le cas (a) ?
5. Dans le cas (b), quel est l'harmonique majeur ?

Remarque : il est impossible d'obtenir en pratique une force identique à celle de cet exemple. On peut cependant s'en approcher au moyen de machines dites hydropulses, utilisées pour des essais de fatigue.

TABLE 2.1 – Harmoniques

n	1	3	5	7	9	11	13
F_n/F	1.2732						
(a) X_n/δ	2.2096						
(b) X_n/δ	1.32						

2.2 Résolution fréquentielle pour signal bruité HF : TFD

2.2.1 Rappels sur la TFD

1. TFD= version discrète, numérique (donc échantillonnée) de la TF continue : on travaille sur des échantillons du signal délivré par le capteur de vibrations
2. Théorème de Shannon : $F_e > 2F_{max}$: donc échantillonner assez finement, c'est à dire prendre une période d'échantillonnage T_e petite.
3. Résolution fréquentielle : $\Delta f = 1/T_{obs}$: donc observer assez longtemps, c'est à dire prendre un nombre d'échantillons N_e suffisant, puisque $T_{obs} = N_e T_e$

2.2.2 Analyse spectrale avec Matlab

On donne 3 fonctions Matlab : **sinus.m, spectre.m, carre.m** et un programme principal de départ (à compléter) : **anavib0.m**.

1. Utiliser l'aide en ligne (help) pour découvrir ces fonctions
2. Tester un sinus, T_{obs} grand, et respect Shannon
3. Tester un sinus, T_{obs} grand, et non-respect Shannon
4. Tester un sinus T_{obs} petit, et respect Shannon
5. Tester deux sinus (15Hz 2V + 100Hz 0,1V) : étude de la résolution fréquentielle

2.2.3 Etude d'un signal complexe de vibrations

On fournit un signal de vibrations inconnu (fichier **signal.mat**). Charger les données en mémoire dans le vecteur x : **load signal.mat** et vérifier le nombre d'échantillons : **size(x)**. En faire l'analyse spectrale approfondie : donner toutes les fréquences présentes et leur amplitude respective. Quelle est la vibration la plus gênante ?

2.2.4 Annexes : listings Matlab

```
function [x,t] = sinus(Fe,T,f,A)
%******************************
%syntaxe: [x,t] = sinus(Fe,T,f,A)
%4 param entree: Fe freq echantillonnage, Tobs, freq signal, Amplitude
%2 vecteurs sortie: x=valeurs des echantillons, t=vecteur tps,
%*******
Te = 1/Fe;
w = 2*pi*f;
t = 0:Te:T;
x = A*sin(w*t);
%FIN DE LA FONCTION
```

```
function [Sxx,freq] = spectre(Fe,x,N,dB)
%*************************************
%***Calcul de la FFT***
z = fft(x,N);
%***Normalisation***
Nx=min(N,length(x));
z=z/Nx;
%***Calcul du spectre***
Sxx = abs(z).^2;
if dB=='o',
        Sxx = 10*log10(Sxx);
end
%***Calcul des fréquences***
Df = Fe/N;
freq = Df*(0:(N-1));
%FIN FONCTION



%DEBUT PGM PRINCIPAL:
%TD ANAVIB1 % Luthon GIM2A Rev.2010%
Te=.005;
Fe=1/Te
N=1024;
A=2;
Tobs=(N-1)*Te;
f0=3; %f1=50; f2=...
A0=2; %A1=4; A2=...
[x0,t]=SINUS(Fe,Tobs,f0,A0);
%AJOUTER AUTRE SINUS ICI:
%[x1,t]=SINUS(Fe,Tobs,f1,A1);
%[x2,t]=SINUS(Fe,Tobs,f2,A2);
%[x3,t]=SINUS(Fe,Tobs,f3,A3);
x=x0;%+x1+x2+x3;
%FIN AJOUTER
subplot(2,1,1)
plot(t,x)
%AJOUTER LEGENDE FIG ICI:
%grid, title('text'),xlabel('txt'), ylabel('texte')
%FIN AJOUTER
%MODIFIER CHOIX dB/LIN ICI:
dB='n'
%dB=input('...','s');
%if isempty(dB), dB='o', end
%FIN MODIFIER
[Sxx,freq] = SPECTRE(Fe,x,N,dB);
subplot(2,1,2)
plot(freq,Sxx)
%AJOUTER LEGENDE FIG ICI:
%grid, title(''),xlabel('f (Hz) [0-Fe]'), ylabel('txt')
%FIN AJOUTER
```

2.3 Annexe 1 : Courbes Canoniques du 2eme Ordre

Voir courbes de Bode : gain et phase en fonction de la fréquence, Fig. 2.2.

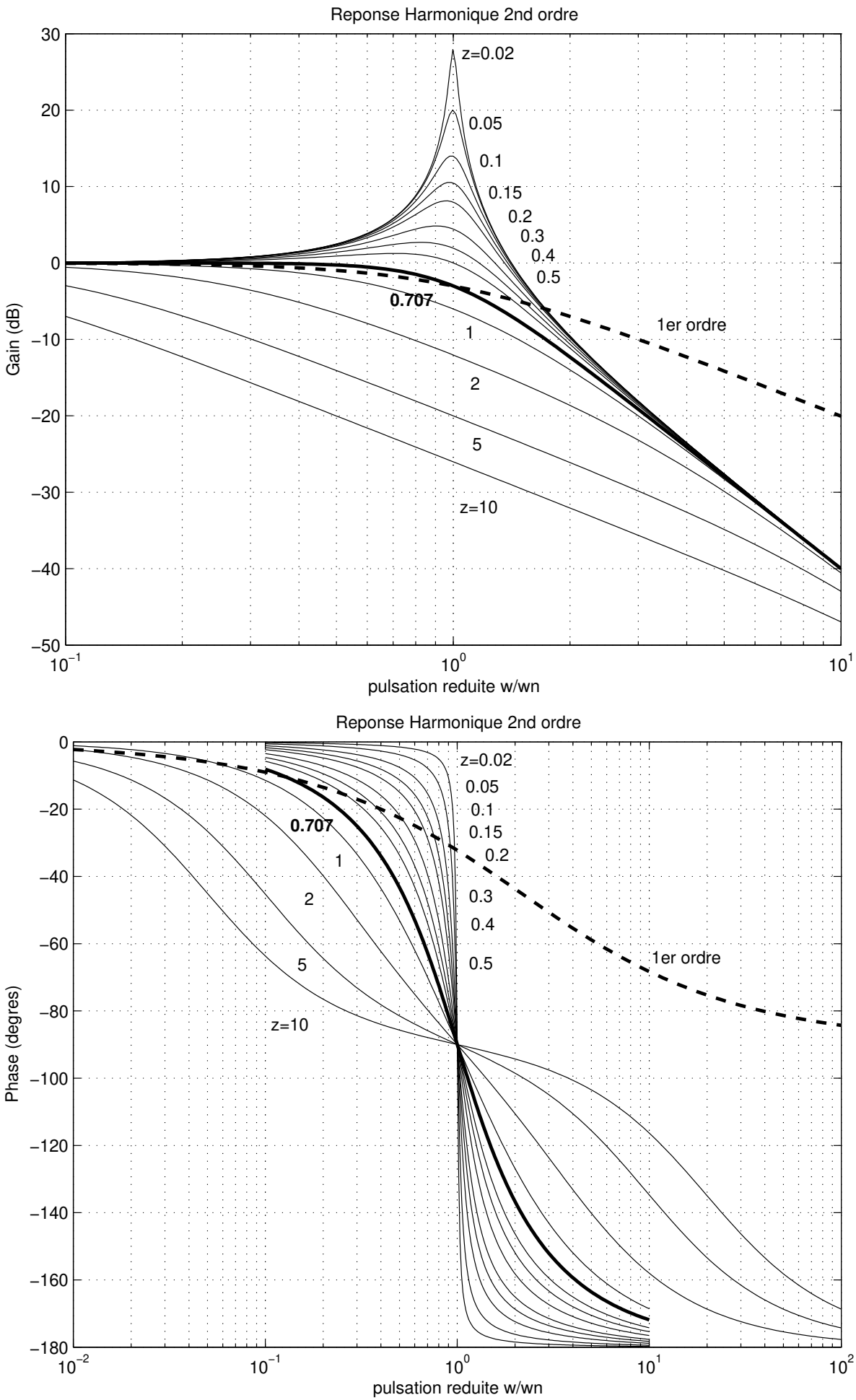


FIGURE 2.2 – Courbes de Bode d'un système du 2e ordre canonique : a) Gain ; b) Phase. (où w_n dénote la pulsation propre du système et z le coefficient d'amortissement).

2.4 Sujet 2015 (30mn) - Résonateur de Helmholtz

Un petit local aveugle (sans fenêtre) servant de réserve de stockage est ventilé par un conduit de longueur $L = 10m$ et de section $A = 0.01m^2$. Le volume du local vaut $V = 10m^3$. Le tube de ventilation constitue un résonateur de Helmholtz.

1. Calculer la fréquence propre f_0 de cet oscillateur de Helmholtz dans l'air à température ambiante $T_0 = 20°C$.

   On donne : $R = 287m^2/s^2/°K$ et $\gamma = 1.4$.

   NB : Attention aux unités !
2. Cette fréquence est-elle a priori audible par l'homme ? Justifier.
3. Comme le personnel entrant dans le local pour y stocker du matériel se plaint néanmoins d'y entendre un bruit, on décide de mettre en place un capteur à la sortie de la bouche d'aération, pour acquérir le signal vibratoire correspondant et surveiller les harmoniques de f_0 jusqu'au rang $n = 10$. Quelle est donc la fréquence maximale F_{max} à surveiller ? Comment choisir la fréquence d'échantillonnage F_e ? Donner sa valeur.
4. Si l'on veut une bonne résolution fréquentielle pour faire l'analyse spectrale par transformée de Fourier (typiquement une résolution $\Delta f \leq f_0/10$), combien de temps doit-on observer le signal ? Proposer une valeur minimale de la durée d'observation T_{OBS}.
5. En déduire le nombre d'échantillons N_e que l'on doit acquérir a minima pour analyser le signal.

2.5 Sujet 2016 (30mn)

Dans un hall abritant 2 machines tournantes (à 1200 tr/min et 1100 tr/mn respectivement) et un gros ventilateur (dont les pales font 6 rotations/sec), on veut installer un nouvel appareil, hélas fragile aux vibrations. Pour mesurer les vibrations qu'il subit, on installe sur l'appareil un capteur de position qui délivre un signal proportionnel à l'amplitude des vibrations. Ce signal $s(t)$ est enregistré au cours du temps et converti en numérique pour être ensuite traité par ordinateur (analyse spectrale sous Matlab par FFT).

1. Quelles fréquences seront présentes dans le spectre du signal fourni par le capteur ? Exprimer leur valeur numérique en Hz (ou sec^{-1}).

   NB : On supposera que les seules sources de vibrations sont les 2 machines tournantes et le ventilateur, et que ces machines ne génèrent pas d'harmonique, mais uniquement leur fréquence fondamentale image du mouvement de rotation.
2. Comment choisir la fréquence d'échantillonnage minimale Fe_{min} pour échantillonnner correctement le signal image des vibrations ?

   On prend une marge en choisissant pour Fe une valeur supérieure de 50% à celle déterminée à la question précédente : $Fe = 1.5Fe_{min}$.

   En déduire la période d'échantillonnage Te utilisée pour faire l'acquisition numérique du signal du capteur.
3. Pour pouvoir distinguer toutes les raies spectrales sur le spectre du signal, quelle résolution fréquentielle Δf faut-il avoir a minima ?

   Connaissant la relation entre résolution fréquentielle et durée d'observation T_{obs}, en déduire le nombre minimum N d'échantillons du signal nécessaire à une analyse spectrale convenable.
4. Avec $Fe = 60Hz$ et $N = 19$, on a obtenu le signal et le spectre de la Fig.2.3. Commentaires ?

5. Si l'on avait observé le signal de vibrations pendant $0.6sec$, qu'aurait-on obtenu ? Dessiner l'allure du spectre. Conclure.

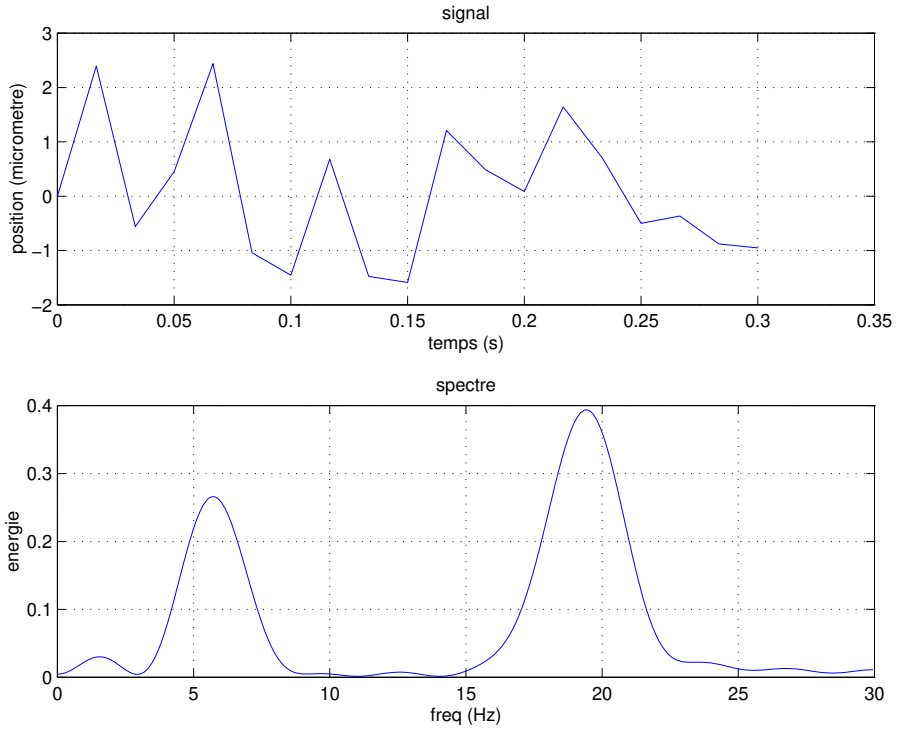


FIGURE 2.3 – Exanavib.m : $Fe = 60Hz$; $N = 19$

2.6 Sujet 2017 (30mn) - Etude fréquentielle

On considère un système mécanique à 1 degré de liberté modélisé par sa transmissibilité complexe :

$$T(j\omega) = \frac{X(j\omega)}{F(j\omega)} = \frac{1}{k + j\omega c - m\omega^2} \tag{2.1}$$

où :

— X et F sont les T.L. du déplacement $x(t)$ et de la force d'excitation vibratoire $f(t)$
— k, m et c sont des paramètres du système (équivalents à raideur, masse, amortisseur). A.N. : $m = 1$; $c = 251$ et $k = 3,95.10^7$ (k s'exprimant en N/m).

1. En mettant T sous forme d'une fonction de transfert canonique d'un système du 2e ordre, exprimer la fréquence de résonance $f_0(Hz)$ et le cœfficient d'amortissement ζ du système en fonction des 3 paramètres du modèle.

   A.N. : calculer f_0 et ζ.

2. Exprimer le module de la transmissibilité normalisée $\left|\frac{X}{F/k}\right|$ et tracer sommairement son allure en fonction de la fréquence (on s'aidera des abaques des systèmes du 2e ordre fournies en Fig. 2.2 du polycopié de cours, en tenant compte de la valeur numérique de l'amortissement ζ calculée ci-dessus).

3. Ce système subit une force d'excitation extérieure caractérisée par le spectre de la Fig. 2.4.

   Mesurer précisément les différentes fréquences d'excitation et leur énergie respective. Les positionner en superposition sur le tracé du module de la transmissibilité.

4. Sachant que le système risque d'être détruit par ces forces vibratoires si elles engendrent un facteur d'amplification dynamique $\left|\frac{X}{F/k}\right|$ supérieur à +10 dB, indiquer la bande de fréquences hautement critique (donc la/les raies à absolument éliminer).
5. Pour surveiller le système, on décide de capter les vibrations avec un accéléromètre. Or on sait que le mode de fixation d'un capteur (vissé, collé, aimanté, tenu en main) a une incidence considérable sur sa bande passante (BP). Pour choisir le mode de fixation de l'accéléromètre, on se réfèrera donc aux informations de la Fig. 1.2.

   Supposant qu'il n'y a aucun risque pour les fréquences telles que $\left|\frac{X}{F/k}\right| \leq -20dB$, indiquer la fréquence maximale à surveiller. En déduire le choix à minima de la BP du capteur et donc le/les modes de fixation non adaptés (parmi les 4 possibles).

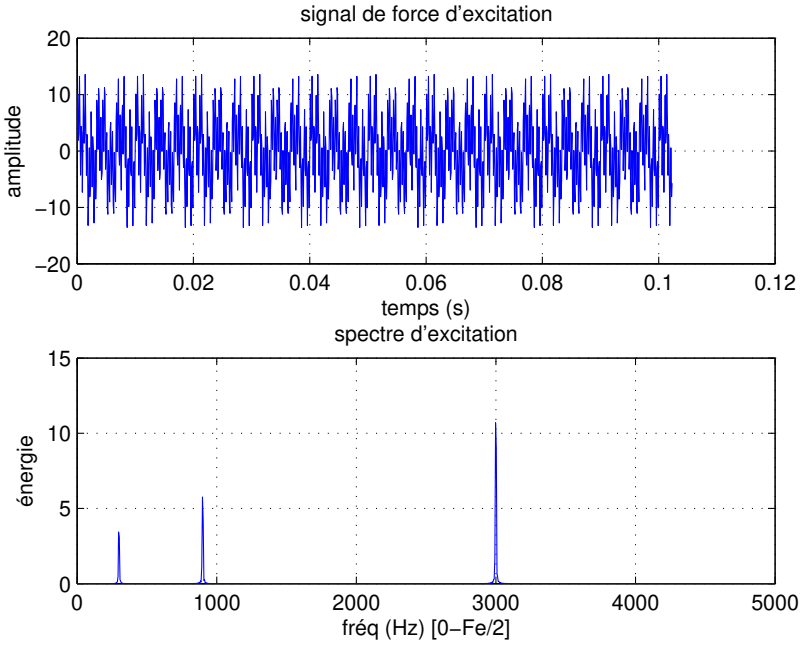


FIGURE 2.4 – Signal et spectre de la force d'excitation vibratoire.

2.7 Sujet 2018 (30mn) - Analyse fréquentielle

La Fig. 2.5a présente le spectre vibratoire d'un palier de moteur entraînant une pompe, obtenu par réponse impulsionnelle à un marteau de choc.

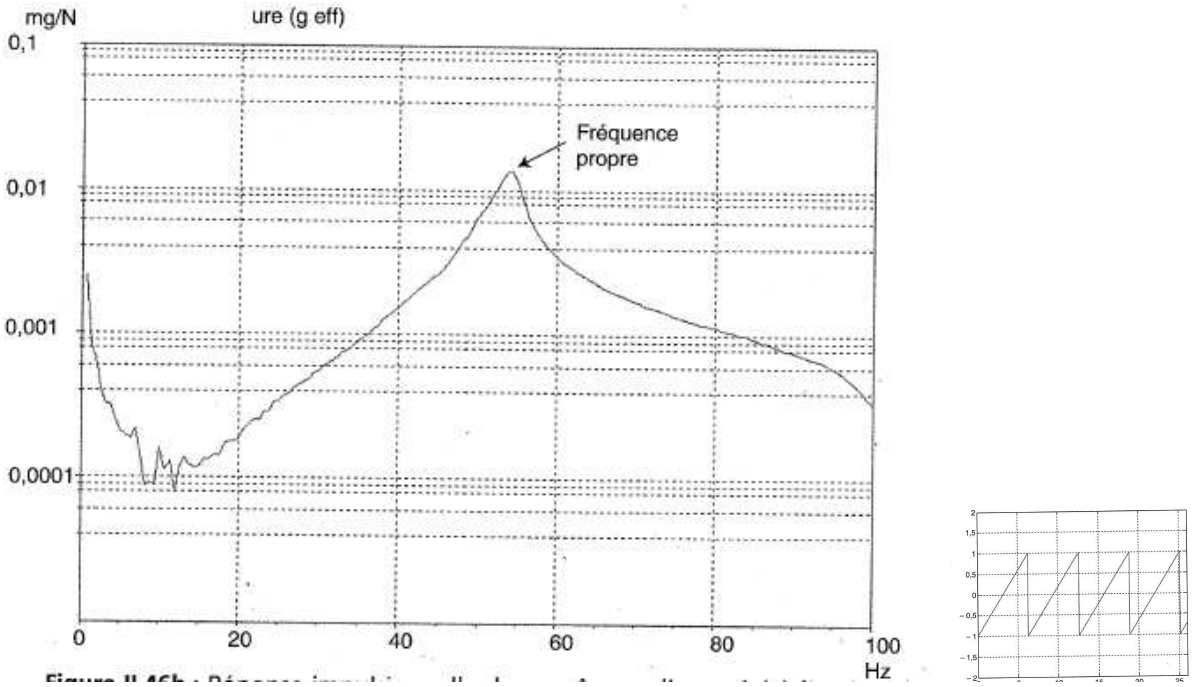
Quand la pompe entre en cavitation, le palier subit une force d'excitation $s(t)$ qu'on suppose avoir la forme d'un signal temporel en dents de scie (du type de celui de la Fig. 2.5b). Le développement en série de Fourier de $s(t)$ vaut :

$$s(t) = \frac{2A}{\pi}\left[\sin(\omega_0 t) - \frac{1}{2}\sin(2\omega_0 t) + \frac{1}{3}\sin(3\omega_0 t)... + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(n\omega_0 t) + ...\right]$$

où l'amplitude crête vaut $A = 1$, et la pulsation $\omega_0 = 2\pi f_0$, avec $f_0 = 18Hz$.

1. **Caractérisation de l'excitation :**

   Remplir un tableau donnant les fréquences des sinusoïdes présentes dans $s(t)$, les amplitudes correspondantes (en valeur absolue, sans s'occuper du signe qui ne traduit qu'un déphasage) ainsi que leur valeur en dB (jusqu'à l'ordre $n = 5$).



a b

FIGURE 2.5 – a) Réponse d'un palier excité à l'arrêt par un marteau de chocs [3] ; b) Dents de scie.

2. Tracer alors sommairement la représentation du spectre de raies de $s(t)$ (amplitudes en dB en fonction des fréquences en Hz).
3. **Caractérisation du palier (Fig. 2.5a) :**
   Mesurer la fréquence propre f_r du palier et l'amplitude de sa résonance (en donner la valeur en dB).
4. Donner la bande passante à -20dB du palier : $BP = [f_{min}; f_{max}]$.
5. Superposer sur la réponse du palier le spectre de raies de l'excitation $s(t)$ (en échelle relative).
6. **Surveillance vibratoire :**
   Si l'on suppose que les vibrations sont sans risque pour le système à condition que leur fréquence se situe hors de la bande passante BP, indiquer la/les harmoniques de $s(t)$ à surveiller particulièrement pour la maintenance préventive du système.
7. Indiquer la fréquence d'échantillonnage minimale à utiliser si l'on veut faire l'acquisition numérique du signal de vibration fourni par un capteur tel un accéléromètre placé sur le palier.
8. **Question bonus :** Si vous voulez un bonus, démontrez (en utilisant l'intégration par parties) la formule du DSF de $s(t)$ donnée ci-dessus, sachant que ce signal (impair) est défini par l'équation : $s(t) = \frac{2A}{T_0}t$ pour $t \in [-T_0/2; T_0/2]$ (ou bien marquez simplement B en rouge sur la page de garde de votre copie).

N.B. On pensera à rendre la figure de l'énoncé complétée avec le spectre de l'excitation.

2.8 Sujet 2019 (30mn) - Analyse fréquentielle

Soit un système en rotation à la vitesse $N = 600tr/mn$ qui subit un balourd.

1. Le système est caractérisé par sa masse $M = 400kg$, sa raideur $K = 4.10^6 N/m$ et il comporte un amortisseur $C = 1600N/m/s$.
   Sa transmissibilité se modélise par :
   $$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j2\zeta\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$
   Calculer sa pulsation propre ω_0 (en rad/s), son facteur d'amortissement ζ et sa fréquence de résonance f_r (en Hz).
   La Fig. 2.6 représente ses courbes de Bode. Que vaut la surtension Q_{dB} à la résonance ?
   La Fig. 2.7b) représente l'allure de sa réponse impulsionnelle. Quelle est approximativement sa constante de temps τ ?
2. Le balourd, défini par $b = m \times d$, correspond à une petite masse $m = 10g$ située à une distance de $d = 30cm$ de l'axe de rotation. Sachant que le balourd génère une force d'excitation centrifuge $F(t) = b\Omega^2 \cos(\Omega t)$ où Ω est la vitesse de rotation en rad/s, calculer l'amplitude de cette force, sa pulsation Ω et sa fréquence d'excitation correspondante f_e (en Hz).
3. Un détecteur calé sur le rotor montre que la force d'excitation comporte non seulement le fondamental de fréquence f_e, mais aussi ses harmoniques jusqu'à l'ordre 5 (soit $5f_e$). On veut faire l'analyse spectrale numérique de ce signal capté dans la bande $[0; 5f_e]$. Quelle valeur de fréquence d'échantillonnage F_e faut-il prendre a minima pour l'acquisition du signal ?
4. Si l'on veut une résolution fréquentielle de l'ordre de : $\Delta f = f_e/10$, quelle est la durée minimale d'observation T_{obs} du signal ? Quel est le nombre d'échantillons temporels minimum N_e à acquérir ? On présente en haut de la Fig. 2.7a le signal fondamental de la force excitatrice, acquis sur 2 secondes. Est-ce suffisant pour la résolution fréquentielle ?
5. La Fig. 2.7a en bas montre le signal d'excitation subi par le système.
   Expliquer (à l'aide de la courbe de gain de Bode) pourquoi l'amplitude est environ le double de celle de la force $F(t)$ représentée sur le haut de la Fig. 2.7a).
   Expliquer (à l'aide de la courbe de réponse impulsionnelle) pourquoi il y a des maxima d'amplitude au démarrage.
   Pour réduire les vibrations, on pourrait décaler la fréquence de résonance du système en le lestant. Quelle masse faudrait-il ajouter au système pour que l'amplitude de l'excitation soit atténuée de -10dB ? Est-ce réaliste ?
   Quelle autre solution peut-on envisager ?

Rappels

Oscillateur : $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{M}}}$; $\boxed{\zeta = \frac{C}{2\sqrt{K.M}}}$; $\omega_r = \omega_0\sqrt{1 - 2\zeta^2}$

Echantillonnage (Shannon) : $\boxed{F_e = \frac{1}{T_e} \geq 2F_{max}}$ où F_{max} est la fréquence maximale du signal

Résolution fréquentielle : $\boxed{\Delta f \approx \frac{1}{T_{obs}}}$ où : $T_{obs} = N_e \times T_e$ est la durée d'observation.

2.9 Sujet 2020 (30mn) - Analyse fréquentielle

Pour suivre la déformation d'une structure sensible à toute vibration située dans la bande de fréquences $[0; 5kHz]$ et dont l'amplitude serait supérieure à -60dBV, on colle une jauge extensométrique semi-conductrice dont le facteur de jauge vaut K=100, dont la résistance nominale vaut $R_0 = 1k\Omega$ et dont la longueur nominale vaut $l = 1cm$.

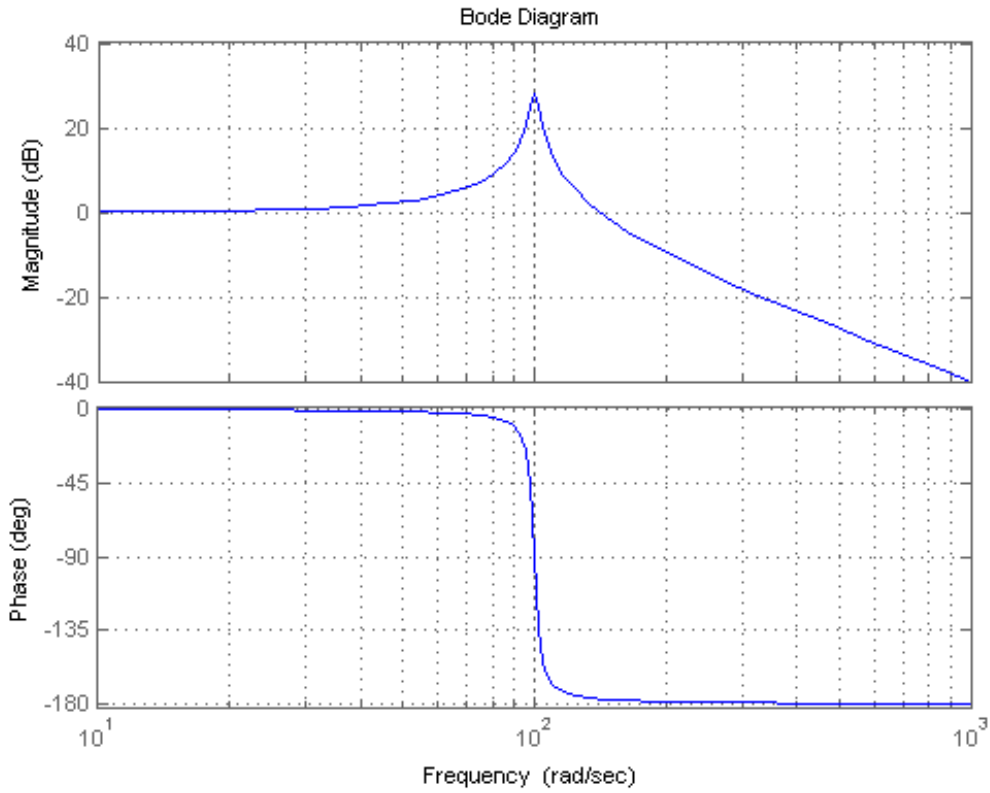


FIGURE 2.6 – Transmissibilité du système (pulsations en abscisse).

La variation de résistance est détectée en mesurant la tension différentielle v_m aux bornes d'un pont de Wheatstone alimenté avec une tension continue $E_a = 10V$. La mesure donne pour v_m une tension variable dans le temps, de forme triangulaire, d'amplitude crête $A = 100mV$ (soit -20dBV) et de fréquence fondamentale $f_0 = 150Hz$. Le signal temporel correspondant $s(t)$ est représenté sur la Fig.2.8. Le DSF de ce signal triangulaire est donné par l'équation 2.2.

Cette tension analogique est numérisée et analysée par ordinateur : acquisition (échantillonnage) et traitement du signal (filtrage et analyse spectrale).

1. Calculer la variation maximale de la résistance de la jauge (en ohms) : ΔR.

   En déduire l'amplitude maximale de la déformation subie par la structure (valeur crête Δl exprimée en μm).

2. Préciser toutes les fréquences présentes dans le spectre analogique théorique du signal vibratoire et leur amplitude en dBV ?

   Dessiner sommairement l'allure du spectre correspondant.

   Parmi toutes ces fréquences, quelles sont celles à surveiller, car critiques pour le système ?

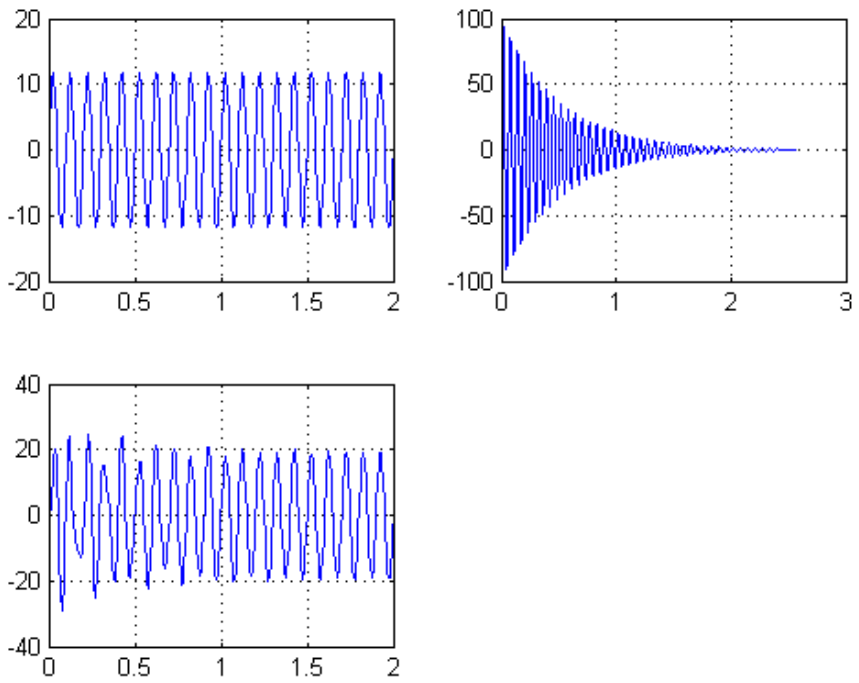
3. Comment choisir la fréquence d'échantillonnage F_e ?

   Proposer une valeur numérique pour F_e (en Hz) ?

4. Quelle doit être la résolution fréquentielle Δf (en Hz) pour bien distinguer toutes les fréquences engendrées par le signal vibratoire et ne pas perdre d'information ?

   En déduire la durée minimale T_{obs} d'observation du signal, et donc le nombre N de points de mesure (échantillons temporels à enregistrer).

5. Pour analyser le signal, on dispose aussi d'un outil de filtrage analogique proposant différents bancs de filtres sélectifs, chacun ayant une sélectivité différente. On a le choix entre 5 types de filtres : analyse moyenne par décade, analyse par octave, largeur de bande



a) b)

FIGURE 2.7 – a) Excitation de balourd (en haut : la fréquence fondamentale ; en bas : le signal subi par le système) ; b) Réponse impulsionnelle du système (axe des temps en secondes)

constante 500Hz, largeur de bande constante 50Hz, bande étroite variable $\pm 5\% f_{centrale}$ (facteur de qualité constant $f_{centrale}/\Delta f = 10$). Le(s)quel(s) choisir ? Le(s)quel(s) proscrire ?

6. **Question Bonus** : En utilisant la méthode d'intégration par parties, démontrer que le DSF du signal triangulaire de la Fig.2.8 est donné par l'équation 2.2 (où $\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi/T$ est la pulsation de base).

$$s(t) = \frac{8A}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \sin\left[(2n+1)\omega_0 t\right] \tag{2.2}$$

NB : Toute réponse fournie sans justification (phrase explicative, démonstration ou caclul) ne donnera aucun point.

Rappel des équations et schémas (Fig.2.8) :

Sensibilité d'une jauge : $\dfrac{\Delta R}{R_0} = K\dfrac{\Delta l}{l}$ Tension d'un pont de Wheatstone : $v_m = \Delta R \dfrac{E_a}{4R_0}$

2.10 Sujet ALT 2020 (30mn) - Résonateur double

On considère un système mécanique en métal à double résonance. Pour le tester, on lui fait subir des essais de fatigue avec une machine dite hydropulse. On utilise des accéléromètres pour mesurer les vibrations engendrées lors des essais, et l'on fait l'acquisition sur ordinateur des signaux fournis par ces capteurs, via une carte d'acquisition dont on peut régler la fréquence d'échantillonnage F_e et le nombre d'échantillons acquis N_e.

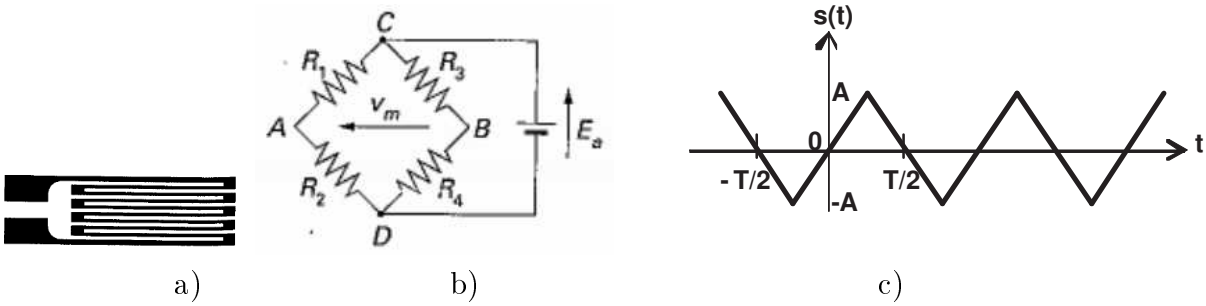


FIGURE 2.8 – a) Jauge extensométrique ; b) Pont de Wheatstone ; c) Signal vibratoire triangulaire.

1. On sait que le système est caractérisé par 2 zones de forte résonance de fréquences très proches : $f_1 = 80Hz$ et $f_2 = 100Hz$ et d'amplitudes : $A_1 = A_2 \approx 30dB$ à ces 2 fréquences propres. On peut l'approximmer comme la superposition de 2 oscillateurs linéaires élementaires de facteur d'amortissement $\zeta_1 = \zeta_2 = 0.02$.
   En s'inspirant des abaques des 2e ordre (courbes de Bode), dessiner sommairement l'allure de sa courbe de transmissibilité, qu'on suppose être le produit de 2 transmissibilités élementaires (donc addition des courbes de Bode).
2. Les forces vibratoires que subit ce système par la machine hydropulse peuvent s'approximer comme un signal carré d'amplitude $A_0 = 3$ ($\approx 10dB$) et de fréquence fondamentale $f_0 = 33Hz$. Rappeler sommairement l'allure du spectre riche en fréquences de ce signal carré (on s'arrêtera à l'harmonique 9, car on considère qu'au delà de cette fréquence qu'on appelera f_{max}, l'énergie de la force d'excitation devient négligeable (amplitude quasi-nulle)).
3. **Choix des paramètres d'acquisition** : déduire des données ci-dessus la valeur de F_e minimale à choisir pour l'acquisition afin de faire une bonne analyse spectrale du signal acquis.
4. Déterminer également la durée minimale d'observation T_{obs} à choisir pour avoir une résolution fréquentielle permettant de bien voir toutes les raies utiles sur le spectre.
5. Déduire de 3 et 4 le nombre minimal N_e d'échantilllons à acquérir sur les signaux des capteurs.
6. Quelle est la/les fréquence(s) vibratoire(s) à surveiller particulièrement lors de cet essai de fatigue ? Expliquer pourquoi.
7. **Choix du capteur accéléromètre** : on dispose sur catalogue de 4 types d'accéléromètre (vissé, collé, aimanté ou sonde-pointe de touche tenue à la main). Ils ont des caractéristiques différentes en terme de bande passante, de simplicité d'utilisation et de prix relatif (Tab. 2.2). Lequel choisir ? Justifier la réponse.

TABLE 2.2 – Caractéristiques des accéléromètres

Type	Bande passante (Hz)	Fixation	Coût
vissé	[0-600]	difficile	prix moyen
collé	[0-300]	assez facile	bon marché
aimanté	[0-150]	facile	prix moyen
pointe de touche	[0-80]	facile	cher

NB : Toute réponse non justifiée à une question ne donnera aucun point. Il faudra systématiquement régider l'explication, et ne pas se contenter d'écrire un résultat.

Bibliographie

[1] M. Del Pedro and P. Pahud. Mécanique Vibratoire. Systèmes discrets linéaires. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne, 2003.

[2] G. Asch et al. Les capteurs en instrumentation industrielle. Dunod, Paris, 2006. 621.3ASC42181.

[3] A. Boulenger and C. Pachaud. Analyse vibratoire en maintenance. Surveillance et diagnostic des machines. Dunod, Paris, 3e edition, 2007. ref. 620.3 BOU 49847.

[4] G. Asch et al. Acquisition de Données, du Capteur à l'Ordinateur. Dunod, Paris, 2003. 621.3ASC42180.

[5] X. Cheng. Analyse spectrale. Rohde&Schwarz 75 years of driving innovation, Février 2010. www.distrame.fr.

[6] Jacques Max and Collaborateurs. Méthodes et techniques de traitement du signal et applications aux mesures physiques, volume 1 et 2. Masson, Paris, 4e edition, 1987.