INITIATION AU TRAITEMENT DE SIGNAL

Franck Luthon

Email : Franck.Luthon@univ-pau.fr

IUT Génie Industriel, Parc de Montaury, 64600 Anglet

ftp ://ftp.iutbayonne.univ-pau.fr/pub/perso/Gim/luthon/estia0.zip[1]

Septembre 2011

1. Ce document peut être reproduit sous réserve d'en citer la source.

Table des matières

1 TRAITEMENT DE SIGNAL ANALOGIQUE **5**
1.1 Introduction . . . 5
1.1.1 Définitions . . . 5
1.1.2 Systèmes analogiques . . . 5
1.2 Signaux analogiques . . . 6
1.2.1 Typologie des signaux . . . 6
1.2.2 Energie et Puissance . . . 6
1.2.3 Corrélation . . . 6
1.2.3.1 Autocorrélation . . . 7
1.2.3.2 Corrélateur analogique . . . 7
1.2.3.3 Intercorrélation . . . 7
1.2.4 Dualité temps-fréquence . . . 7
1.2.4.1 Durée utile - Support borné . . . 8
1.2.4.2 Spectre utile - Spectre borné . . . 8
1.2.4.3 Principe d'incertitude . . . 8
1.2.5 Signal à bande étroite . . . 8
1.2.5.1 Définition . . . 8
1.2.5.2 Signal analytique . . . 9
1.3 Filtres Analogiques . . . 9
1.3.1 Convolution . . . 9
1.3.1.1 Calcul de la sortie d'un filtre . . . 9
1.3.1.2 Chaînage de Filtres . . . 9
1.3.2 Réponse Impulsionnelle et Fonction de Transfert . . . 9
1.3.2.1 Filtre réalisable . . . 10
1.3.2.2 Filtre stable . . . 10
1.3.2.3 Filtres idéaux . . . 10
1.3.3 Relations Fondamentales des Filtres . . . 11
1.3.4 Filtre à bande étroite . . . 11
1.3.4.1 Définition . . . 11
1.3.4.2 Principe du Changement de fréquence . . . 11
1.3.4.3 Ampli sélectif accordable . . . 12
1.3.4.4 Multiplexage en fréquence . . . 12
1.4 Applications . . . 12
1.4.1 Filtrage . . . 12
1.4.1.1 Passe-bas (Intégrateur) . . . 12
1.4.1.2 Passe-haut (Dérivateur) . . . 13
1.4.1.3 Passe-bande . . . 13
1.4.2 Modulation . . . 13
1.4.2.1 Modulation d'amplitude . . . 13
1.4.2.1.1 Démodulation : . . . 14
1.4.2.2 Modulation de fréquence . . . 14
1.4.2.2.1 Fréquence instantanée : . . . 14
1.4.2.2.2 Spectre : . . . 14

1.4.2.2.3 Réalisation : . . . 14
1.4.2.2.4 Démodulation : . . . 14
1.4.3 Analyse spectrale . . . 14
1.4.3.1 But . . . 14
1.4.3.2 Principe . . . 14
1.4.3.3 Mise en œuvre . . . 15
1.4.3.4 Résolution fréquentielle . . . 15
1.4.3.4.1 Pouvoir de résolution : . . . 15
1.4.3.4.2 Troncature temporelle : . . . 15
1.4.3.4.3 Exemple des audio-fréquences ($\nu < 20kHz$) : . . . 15
1.5 Signaux aléatoires : caractérisation et filtrage . . . 15
1.6 Bruit . . . 15
1.7 Filtrage optimal et détection . . . 15
1.8 TD1 - Signal Radar . . . 17
1.9 TD2 - Corrélateur analogique . . . 17

2 TRAITEMENT DE SIGNAL NUMERIQUE 19
2.1 Introduction . . . 19
2.1.1 Généralités . . . 19
2.1.2 Outils mathématiques . . . 19
2.1.2.1 Transformée de Fourier discrète dans le temps TFDT et spectre . . . 19
2.1.2.2 TFD et Transformée en Z . . . 20
2.1.3 Systèmes numériques . . . 20
2.1.3.1 Equation aux différences . . . 20
2.1.3.2 Produit de convolution discret . . . 20
2.1.3.3 Fonction de Transfert . . . 20
2.2 Signaux numériques . . . 20
2.2.1 Les 4 opérations de base . . . 20
2.2.2 Signaux élémentaires et typologie . . . 21
2.2.3 Corrélation . . . 21
2.2.4 Echantillonnage . . . 21
2.2.4.1 Théorème de Shannon . . . 21
2.2.4.2 Echantillonnage naturel . . . 21
2.2.4.3 Echantillonneur bloqueur . . . 22
2.2.5 Quantification . . . 22
2.3 Filtres numériques . . . 22
2.3.1 Causalité et stabilité . . . 22
2.3.2 Système SLIT . . . 23
2.3.3 Synthèse d'un filtre RIF . . . 23
2.3.4 Synthèse d'un filtre RII . . . 24
2.4 Filtrage . . . 24
2.4.1 Linéaire . . . 24
2.4.2 Non-linéaire . . . 25
2.5 Analyse spectrale . . . 25
2.5.1 Autocorrélation . . . 25
2.5.2 Méthode non-paramétrique . . . 25
2.5.3 Méthode paramétrique . . . 25
2.6 TD3 - Synthèse d'un filtre RII . . . 27

3 TRANSFORMEE DE FOURIER DISCRETE 29
3.1 Introduction [1] . . . 29
3.2 Conversion analogique-numérique . . . 29
3.2.1 Échantillonnage et quantification . . . 29
3.2.2 Echantillonnage temporel . . . 29

3.3 Transformée de Fourier Discrète . . . 31
3.3.1 TFDT d'un signal causal . . . 31
3.3.2 Troncature temporelle . . . 31
3.3.3 Echantillonnage fréquentiel - TFD . . . 32

4 TRANSFORMEE EN Z 35
4.1 Introduction sur l'échantillonnage . . . 35
4.1.1 Rappel sur les distributions . . . 35
4.1.1.1 Fonction d'échantillonnage (peigne de Dirac) . . . 35
4.1.1.2 Distribution . . . 35
4.2 TL d'une fonction échantillonnée . . . 36
4.3 TZ des puissances de t . . . 36
4.4 TZ de $f(t)e^{-at}$ . . . 36
4.4.1 Théorème . . . 36
4.5 Translation temporelle . . . 37
4.5.1 Retard . . . 37
4.5.2 Avance . . . 37
4.6 Théorème de la valeur initiale . . . 37
4.7 Théorème de la valeur finale . . . 37
4.7.1 Preuve . . . 38
4.8 Formule d'inversion . . . 38
4.9 Propriété périodique de $\phi^*(p)$ et relation avec $\phi(p)$ . . . 39
4.10 Expression de $\phi^*(p)$ à l'aide des résidus . . . 39
4.10.1 Rappel sur les résidus . . . 40
4.11 Dérivation et intégration par rapport à un paramètre . . . 40
4.12 Théorème de Parseval . . . 40
4.13 Théorème de convolution discrète . . . 40
4.14 Vademecum sur la Transformée en Z . . . 42

5 RECAPITULATIF SUR LES TRANSFORMEES 43
5.1 Rappel sur les distributions . . . 43
5.2 Développement en Série de Fourier . . . 45
5.3 Tableau récapitulatif de la TL . . . 46
5.4 Tableau récapitulatif de la TF . . . 47
5.5 Tableau récapitulatif de la TZ . . . 48
5.6 Tableau synthétique des transformées . . . 49

6 RAPPEL DE PREREQUIS 51
6.1 Trigonométrie . . . 51
6.2 Développements limités usuels au voisinage de zéro . . . 53
6.3 Décomposition des fractions rationnelles : $F(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ . . . 54
6.4 Fonctions hyperboliques directes . . . 55
6.5 Fonctions hyperboliques réciproques . . . 55
6.6 Les coniques . . . 56

7 TRAVAUX PRATIQUES 57
7.1 Introduction à Matlab . . . 57
7.1.1 Principales caractéristiques . . . 57
7.1.2 Environnement de travail . . . 57
7.1.2.1 Session MATLAB . . . 57
7.1.2.2 Contrôle de session . . . 57
7.1.3 Langage de programmation . . . 58
7.1.3.1 Principe de la syntaxe . . . 58
7.1.3.2 Exemples d'instructions . . . 58
7.1.3.3 Opérateurs et constantes . . . 58

7.1.3.4 Contrôle de flux de données 59
7.1.3.5 Création d'une fonction externe 59
7.1.4 Bibliothèque de fonctions 59
7.1.4.1 Fonctions graphiques 59
7.1.4.2 Interaction utilisateur 60
7.1.4.3 Interaction fichiers externes 60
7.1.4.4 Manipulation de matrices 60
7.1.4.5 Fonctions mathématiques 60
7.1.4.6 Signaux de base 60
7.2 TP - Transformée de Fourier 61
7.2.1 Rappels 61
7.2.2 TF Discrète : Analyse spectrale 61
7.2.2.1 Etude du théorème de Shannon 61
7.2.2.2 Influence de la troncature temporelle 61
7.2.2.3 Etude de l'écrêtage 61
7.2.3 Annexes 61
7.2.3.1 Signaux tests 61
7.2.3.2 Fonctions internes 61
7.2.3.3 Fonctions externes 62
7.3 TP - Transformée en Z 63
7.3.1 Rappel sommaire 63
7.3.2 Synthèse de Filtre RII 63
7.3.3 Annexe théorique pour le TP TZ 64

Chapitre 1

TRAITEMENT DE SIGNAL ANALOGIQUE

1.1 Introduction

1.1.1 Définitions

Un signal est le support physique (**véhicule**) de l'information (onde lumineuse, son, signal électrique). Mathématiquement, on le représente par une **fonction** (du temps t, de l'espace) dont on étudie les variations (dans le domaine temporel ou fréquentiel ν). On s'intéresse ici au cas de signaux **monodimensionnels** $f(t)$ (une seule variable). Si la variable est continue, on parle de signal **analogique**. Si la variable est échantillonnée ($t = nT_e$), on parle de signal **discret**. Si l'amplitude est également discrète (pas de quantification q), on parle de signal **numérique** [2, 1].

Physiquement, on aura toujours affaire à de "bonnes" fonctions : bornée, à support borné, continue dérivable ou satisfaisant les conditions de Dirichlet (discontinuités de 1ère espèce uniquement), intégrable, d'énergie finie ou de puissance moyenne finie, voire distributions tempérées ($f(t) \propto t^n$).

1.1.2 Systèmes analogiques

Un système de communication consiste en la **formation** (émission), la **transmission** et la **détection** (réception) d'un signal. Ces trois étapes sont sujettes à des bruits. On caractérise un système par le **rapport signal sur bruit** (SNR en anglais) et la **bande passante** BP (cf. caractéristiques en automatique : précision, vitesse et stablitié). On considèrera ici un sytème de traitement et transmission d'information (filtre) qui est **linéaire, continu, stationnaire** :

$$a_1x_1(t) + a_2x_2(t) \rightarrow a_1y_1(t) + a_2y_2(t) \tag{1.1}$$

$$x(t) = \lim_{n\to\infty} x_n(t) \rightarrow y(t) = \lim_{n\to\infty} y_n(t) \tag{1.2}$$

$$x(t-\tau) \rightarrow y(t-\tau) \tag{1.3}$$

On le caractérise au choix par :
- sa **réponse impulsionnelle** $h(t)$
- sa **fonction de transfert** de Laplace : $H(p) = TL[h(t)]$
- sa fonction de transfert de Fourier : $H(\nu) = TF[h(t)]$
- sa **réponse harmonique** $H(j\omega)$ avec $p = j\omega = j2\pi\nu$

$$e(t) \rightarrow s(t) = h(t) * e(t) \tag{1.4}$$

$$\delta(t) \rightarrow s(t) = h(t) * \delta(t) = h(t) \tag{1.5}$$

$$e^{j\omega t} \rightarrow s(t) = H(j\omega).e^{j\omega t} \tag{1.6}$$

$$E(p) \rightarrow S(p) = H(p).E(p) \tag{1.7}$$

$$E(\nu) \rightarrow S(\nu) = H(\nu).E(\nu) \tag{1.8}$$

En traitement du signal, on préfère la TF à la TL car :

- la fréquence ν a une interprétation physique contrairement à la variable symbolique p
- la TL ne s'applique qu'aux fonctions causales (étude des régimes transitoires) alors que la TF s'applique aussi aux signaux permanents.

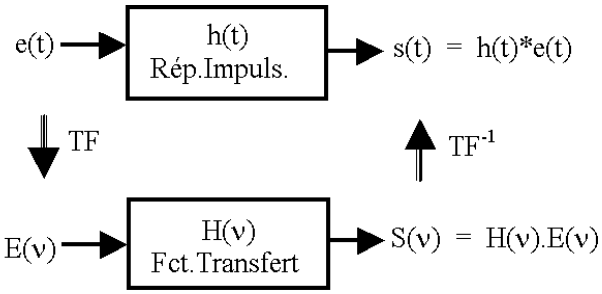


FIGURE 1.1 – Boîte noire

1.2 Signaux analogiques

1.2.1 Typologie des signaux

- signal d'énergie finie ou signal de puissance moyenne finie
- signal périodique ou signal à support borné
- signal large bande ou signal à bande étroite
- signal réel ou signal complexe (signal analytique).
  NB : $x(t) \in \mathcal{R} \Rightarrow X(-\nu) = X^*(\nu)$
- signal certain (déterministe) ou signal aléatoire (probabiliste, avec probabilité $p(x)$)
- signal **ergodique** : moyenne temporelle $\overline{f[x(t)]}$ = moyenne d'ensemble $E[f(x)]$ (espérance mathématique)

$$\overline{f[x(t)]} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f[x(t)]dt \tag{1.9}$$

$$E[f(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)p(x)dx \tag{1.10}$$

1.2.2 Energie et Puissance

Le principe de **conservation de l'énergie** se traduit par des relations temps-fréquence :
- pour les signaux d'**énergie finie**, on peut intégrer par rapport à t ou ν sur tout $\mathcal{R}$:

$$\int_{\mathcal{R}} x(t).y^*(t)dt = \int_{\mathcal{R}} X(\nu).Y^*(\nu)d\nu \tag{1.11}$$

$$P \propto |x(t)|^2 \tag{1.12}$$

$$E = \int_{\mathcal{R}} Pdt = \int_{\mathcal{R}} |x(t)|^2 dt = \int_{\mathcal{R}} |X(\nu)|^2 d\nu \tag{1.13}$$

$$DSE = |X(\nu)|^2 \tag{1.14}$$

- pour les signaux de **puissance moyenne finie**, on calcule une moyenne temporelle sur un intervalle fini T puis passage à la limite :

$$P_{moy} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{[T]} |x(t)|^2 dt = \overline{|x(t)|^2} \tag{1.15}$$

1.2.3 Corrélation

La corrélation mesure la **ressemblance** entre signaux : si $\forall\tau$, $\gamma_{xy}(\tau) = 0$ alors les signaux $x(t)$ et $y(t)$ sont non corrélés.

1.2.3.1 Autocorrélation

Si énergie finie :

$$c_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t-\tau)dt \tag{1.16}$$

$$c_x(-\tau) = c_x^*(\tau) \tag{1.17}$$

$$|c_x(\tau)| \leq c_x(0) = \int_{\mathcal{R}} |x(t)|^2 dt = \int_{\mathcal{R}} |X(\nu)|^2 d\nu = E \tag{1.18}$$

$$TF[c_x(\tau)] = C_x(\nu) = |X(\nu)|^2 \tag{1.19}$$

L'Eq. (1.18) constitue le théorème de Parseval.

Si puissance moyenne finie, on utilise des moyennes temporelles :

$$\gamma_x(\tau) = \overline{x(t)x^*(t-\tau)} \tag{1.20}$$

$$\gamma_x(-\tau) = \gamma_x^*(\tau) \tag{1.21}$$

$$|\gamma_x(\tau)| \leq \gamma_x(0) = \overline{|x(t)|^2} = P_{moy} = \int_{\mathcal{R}} \Gamma_x(\nu)d\nu \tag{1.22}$$

$$TF[\gamma_x(\tau)] = \Gamma_x(\nu) = \lim_{T\to\infty} \frac{|X_T(\nu)|^2}{T} \tag{1.23}$$

où $X_T(\nu)$ dénote la TF du signal tronqué : $x_T(t) = x(t).\sqcap_T(t)$.
$\Gamma_x(\nu)$ est la DSP moyenne (ne se calcule jamais directement mais par la TFD).

1.2.3.2 Corrélateur analogique

Principe du corrélateur analogique pour signaux de P_{moy} finie : cf. TD 945A
Exemple : cas de $x(t) = A\cos 2\pi f_0 t)$ (démonstrateur Matlab T945.m)

1.2.3.3 Intercorrélation

Si énergie finie :

$$c_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t-\tau)dt \tag{1.24}$$

$$c_{xy}(-\tau) = c_{xy}^*(\tau) \tag{1.25}$$

$$TF[c_{xy}(\tau)] = X(\nu)Y^*(\nu) \tag{1.26}$$

Si puissance moyenne finie :

$$\gamma_{xy}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{[T]} x(t)y^*(t-\tau)dt = \overline{x(t)y^*(t-\tau)} \tag{1.27}$$

$$\gamma_{xy}(-\tau) = \gamma_{xy}^*(\tau) \tag{1.28}$$

$$TF[\gamma_{xy}(\tau)] = \Gamma_{xy}(\nu) = \lim_{T\to\infty} \frac{X_T(\nu)Y_T^*(\nu)}{T} \tag{1.29}$$

La correspondance temps-fréquence donnée par l'Eq. (1.29) constitue le théorème de Wiener-Khintchine.
$\Gamma_{xy}(\nu)$ est la DSP croisée.

1.2.4 Dualité temps-fréquence

Soit un signal réel $x(t)$ d'énergie finie E.

1.2.4.1 Durée utile - Support borné

La puissance instantanée vaut : $x^2(t)$. On définit la durée utile $T_u = t_1 - t_0$ de deux façons équivalentes :

$$\int_{t_0}^{t_1} x^2(t)dt = (1-\epsilon)E \text{ (où typ. } \epsilon = 10\%) \tag{1.30}$$

$$\forall t \quad | \quad t < t_0 \text{ ou } t > t_1 \quad , \quad x^2(t) < \frac{\max_{t\in\mathcal{R}} x^2(t)}{2} \text{ (atténuation de puissance de -6dB)} \tag{1.31}$$

Pour un signal de P_{moy} finie, $T_u = \infty$.

Le cas d'un signal à support borné correspond à $\epsilon = 0$ dans l'Eq. (1.30).

1.2.4.2 Spectre utile - Spectre borné

On définit $F_u = F_{max} - F_{min}$ (avec $F_{min} = -F_{max}$) tel que :

$$\int_{F_{max}}^{\infty} |X(\nu)|^2 d\nu < \frac{\epsilon}{2}E \Longleftrightarrow \int_{F_{min}}^{F_{max}} |X(\nu)|^2 d\nu \geq (1-\epsilon)E \tag{1.32}$$

Pour un signal de P_{moy} finie, on définit F_u avec la DSP $\Gamma_x(\nu)$.

Cas d'un signal à spectre borné : si $X(\nu)$ est négligeable pour $\nu \notin [F_{min}, F_{max}]$, c'est-à-dire :

$$\exists M, \int_{F_{min}}^{F_{max}} |X(\nu)| d\nu = M \tag{1.33}$$

alors toutes les dérivées du signal sont bornées (théorème de Bernstein) : $|x^{(n)}(t)| \leq (2\pi F_{max})^n M$.

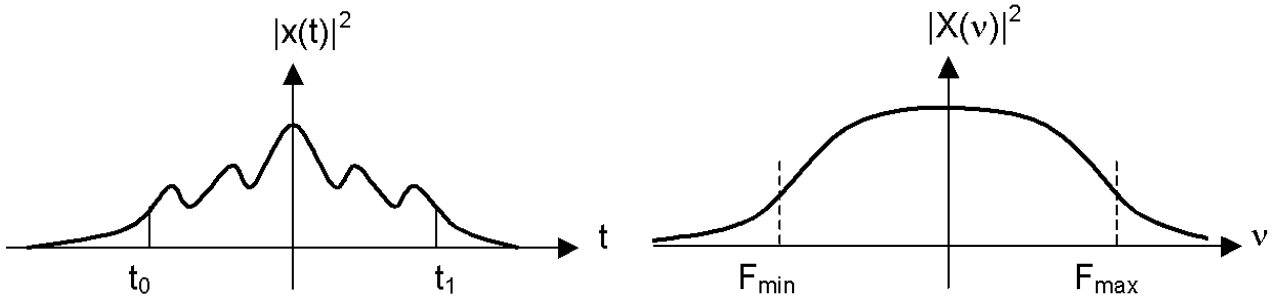


FIGURE 1.2 – a) Durée utile ; b) Spectre utile.

1.2.4.3 Principe d'incertitude

On a la relation : $\boxed{F_u T_u \geq \frac{1}{\pi}}$

1.2.5 Signal à bande étroite

1.2.5.1 Définition

- Signal $x(t)$ réel tel que : $|X(\nu)| = 0$ au voisinage de $|\nu| = 0$.
- On définit le spectre utile $\Delta\nu$ au voisinage de F_0 (intérêt si $\Delta\nu \ll F_0$)
- Spectre : $X(\nu) = \frac{1}{2}[X_+(\nu) + X_-(\nu)] = \frac{1}{2}[X_+(\nu) + X_+^*(-\nu)]$

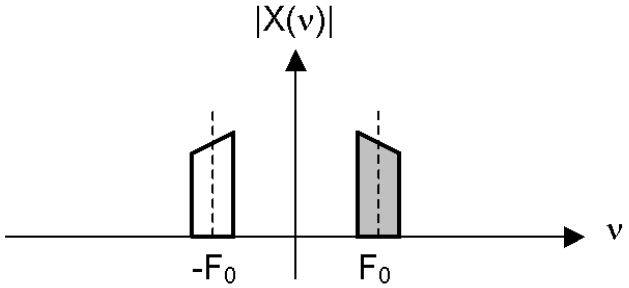


FIGURE 1.3 – Spectre d'un signal à bande étroite.

1.2.5.2 Signal analytique

On montre qu'on peut écrire : $x(t) = \Re[x_+(t)] = \frac{1}{2}[x_+(t) + x_+^*(t)]$
$x_+(t) = x_0(t)e^{j2\pi F_0 t}$: signal analytique (HF)
$X_+(\nu) = X_0(\nu) * \delta(\nu - F_0) = X_0(\nu - F_0)$
$x_0(t) = m(t)e^{j\phi(t)}$ est l'enveloppe BF complexe de $x(t)$
$e^{j2\pi F_0 t}$ est la porteuse
$x(t) = m(t)\cos[2\pi F_0 t + \phi(t)]$: signal modulé en amplitude par $m(t) \in \mathcal{R}^+$ et en phase par $\phi(t)$

1.3 Filtres Analogiques

1.3.1 Convolution

1.3.1.1 Calcul de la sortie d'un filtre

La sortie $s(t)$ d'un filtre est la convolution de l'entrée $e(t)$ par la réponse impulsionnelle $h(t)$: $s(t) = h(t) * e(t)$.

Un produit de convolution est une intégrale "compliquée" : $x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)y(t-u)du$.

Interprétation graphique : retournement et décalage d'une des fonctions, produit avec l'autre fonction et sommation des aires sous la courbe produit.

La transformée $H(\nu)$ de la réponse impulsionnelle s'appelle la fonction de transfert du filtre.

Intérêt principal : un produit de convolution se transforme en produit simple : $S(\nu) = H(\nu).E(\nu)$

1.3.1.2 Chaînage de Filtres

La convolution est commutative donc l'ordre des filtres est indifférent, mais attention aux impédances (solution : étages séparateurs ou même impédance caractéristique).

$$s(t) = [h_1(t) * h_2(t) * \cdots * h_n(t)] * e(t) = h(t) * e(t) \quad (1.34)$$
$$S(\nu) = [H_1(\nu).H_2(\nu) \cdots H_n(\nu)]E(\nu) = H(\nu) \cdot E(\nu) \quad (1.35)$$

Exemple : pour obtenir la réponse impulsionnelle $h(t)$ d'un filtre, on peut mettre en entrée un échelon (dit de Heaviside) $e(t) = H(t)$ puis dériver la sortie :

$$s(t) = h(t) * H(t) \;\Rightarrow\; s'(t) = \underbrace{[h(t) * H(t)]}_{s(t)} * \delta'(t) = h(t) * H'(t) = h(t) * \delta(t) = h(t)$$

1.3.2 Réponse Impulsionnelle et Fonction de Transfert

Un filtre est caractérisé soit par sa réponse impulsionnelle $h(t)$ soit par ses fonctions de transfert (en module et en argument) : $H(p)$ (pour les signaux causaux uniquement) ou $H(\nu) = |H(\nu)|\exp[j\Phi(\nu)]$.

Il produit une distorsion linéaire du signal :

– si $|H(\nu)| \neq$cte, on a une distorsion d'amplitude

- si $\Phi(\nu) \neq k\nu$ avec k =cte, on a distorsion de phase (œil sensible à la distorsion de phase contrairement à l'oreille).
- filtre à phase minimum : ni pôle, ni zéro avec $\Re(p) > 0$
- filtre sans distorsion linéaire si : $e(t) \longrightarrow s(t) = Ae(t-\tau) = e(t) * [A\delta(t-\tau)]$.
  Donc : $h(t) = A\delta(t-\tau) \leftrightarrow H(\nu) = Ae^{-j2\pi\tau\nu}$

1.3.2.1 Filtre réalisable

Il doit respecter le principe de causalité (Fig. 1.4a).
CNS : $h(t) = 0$ pour $t < 0 \Rightarrow H(p) \quad \exists$.

1.3.2.2 Filtre stable

Toute entrée bornée doit donner une sortie bornée : $|e(t)| < M \Rightarrow |s(t)| < M'$.
CNS : $\int_{\mathcal{R}} |h(t)|dt \quad \exists \quad \Rightarrow \quad |H(\nu)|$ borné et $|H(p)|$ borné avec pôles tels que $\Re(p) < 0$ (Fig. 1.4b).

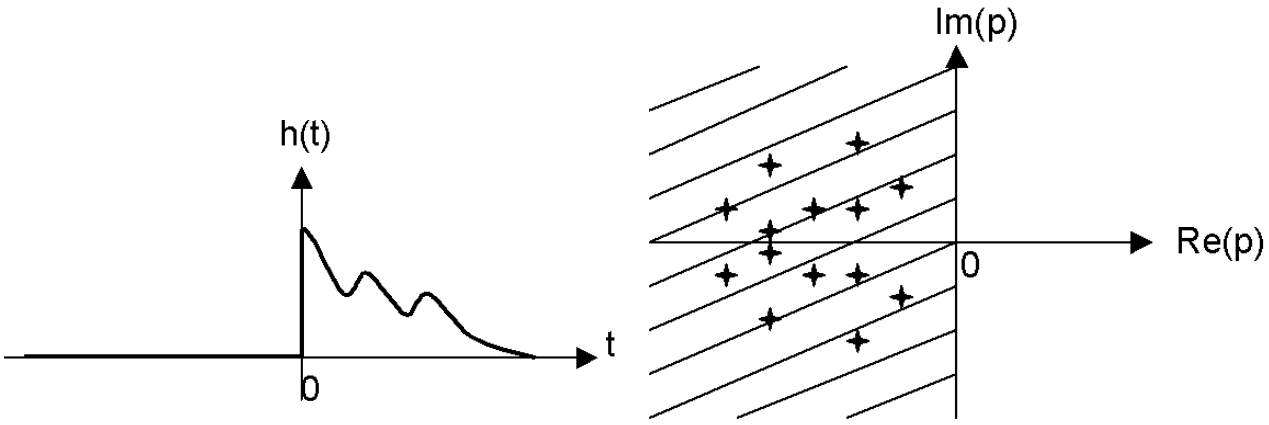


FIGURE 1.4 – a) causalité ; b) stabilité.

1.3.2.3 Filtres idéaux

- **Ampli** : réalisable et stable

$$s(t) = A.e(t) = e(t) * [A\delta(t)] \Rightarrow h(t) = A\delta(t) \Longrightarrow H(\nu) = A$$

- **Retard pur** : réalisable et stable

$$s(t) = e(t-\tau) = e(t) * \delta(t-\tau) \Rightarrow h(t) = \delta(t-\tau) \Longrightarrow \ H(\nu) = e^{-j2\pi\tau\nu}$$

- **Passe-bas** : pas stable, pas réalisable

$$H(\nu) = \sqcap_{2F_c}(\nu) \Longrightarrow h(t) = 2F_c \mathrm{sinc}(2\pi F_c t)$$

  Approximation possible avec $0 < \varepsilon \ll 1$ et $n \gg 1$:

$$H(\nu) = \frac{1}{1 + \varepsilon \left(j\frac{\nu}{F_c}\right)^n}$$

- **Dérivateur** : réalisable mais pas stable

$$s(t) = e'(t) = e(t) * \delta'(t) \Rightarrow h(t) = \delta'(t) \Longrightarrow H(\nu) = j2\pi\nu$$

- **Intégrateur** : réalisable mais pas stable

$$s(t) = \int_{-\infty}^{t} e(u)du = e(t) * H(t) \Rightarrow h(t) = H(t) \Longrightarrow \ H(\nu) = \frac{1}{j2\pi\nu} + \frac{1}{2}\delta(\nu)$$

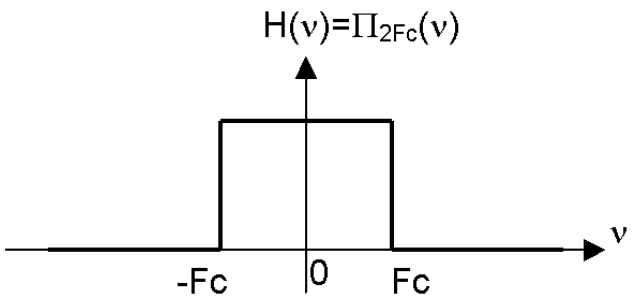


FIGURE 1.5 – Filtre passe-bas.

1.3.3 Relations Fondamentales des Filtres

Le filtre (conçu, donc forcément d'énergie finie !) est caractérisé par sa fonction d'autocorrélation et sa DSE :

$$c_h(\tau) = \int_{\mathcal{R}} h(t)h^*(t-\tau)dt \tag{1.36}$$

$$TF[c_h(\tau)] = |H(\nu)|^2 \tag{1.37}$$

Alors la sortie est caractérisée par les relations suivantes :

Si le signal d'entrée est d'énergie finie :

$$c_s(\tau) = c_h(\tau) * c_e(\tau) \tag{1.38}$$

$$|S(\nu)|^2 = |H(\nu)|^2.|E(\nu)|^2 \tag{1.39}$$

$$E_s = c_s(0) = \int_{\mathcal{R}} |H(\nu)|^2.|E(\nu)|^2 d\nu = \int_{\mathcal{R}} |S(\nu)|^2 d\nu \tag{1.40}$$

Si le signal d'entrée est de puissance moyenne finie :

$$\gamma_s(\tau) = c_h(\tau) * \gamma_e(\tau) \tag{1.41}$$

$$TF[\gamma_s(\tau)] = \Gamma_s(\nu) = |H(\nu)|^2.\Gamma_e(\nu) \tag{1.42}$$

$$Ps_{moy} = \int_{\mathcal{R}} |H(\nu)|^2.\Gamma_e(\nu)d\nu \tag{1.43}$$

1.3.4 Filtre à bande étroite

1.3.4.1 Définition

Filtre dont la réponse impulsionnelle est un signal à bande étroite.

- $h(t) = \Re[h_+(t)] = \Re[h_0(t)e^{j2\pi F_0 t}]$
- $H(\nu) = \frac{1}{2}[H_+(\nu) + H_-(\nu)] = \frac{1}{2}[H_0(\nu - F_0) + H_0^*(-\nu - F_0)]$
- Le filtre passe-bande idéal n'est pas réalisable : $H(\nu) = \sqcap_{\Delta\nu}(\nu - F_0) + \sqcap_{\Delta\nu}(\nu + F_0)$
- relation entrée-sortie : $s(t) = h(t) * e(t)$ avec $e(t)$ à BE
- $S(\nu) = \frac{1}{4}[E_+(\nu) + E_-(\nu)][H_+(\nu) + H_-(\nu)] = \frac{1}{2}[S_+(\nu) + S_-(\nu)]$
- $S_+(\nu) = \frac{1}{2}E_0(\nu - F_0)H_0(\nu - F_0) = \frac{1}{2}E_0(\nu)H_0(\nu) * \delta(\nu - F_0) \Rightarrow S_0(\nu) = \frac{1}{2}E_0(\nu)H_0(\nu)$
- spectre de la sortie : $S(\nu) = \frac{1}{2}[S_0(\nu - F_0) + S_0^*(-\nu - F_0)]$
- le signal de sortie est à BE : $s(t) = \Re[s_0(t)e^{j2\pi F_0 t}]$

1.3.4.2 Principe du Changement de fréquence

On multiplie un signal à BE $x(t) = \Re[x_0(t)e^{j2\pi F_0 t}]$ avec un oscillateur local $y(t) = \cos(2\pi F_L t)$.

On a en sortie du multiplieur : $z(t) = \alpha x(t)y(t) \Rightarrow Z(\nu) = Z_1(\nu) + Z_2(\nu)$

Avec : $Z_1(\nu) = \frac{\alpha}{4}[X_0(\nu - (F_0 + F_L)) + X_0^*(-\nu - (F_0 + F_L))] \leftrightarrow z_1(t) = \frac{\alpha}{2}\Re[x_0(t)e^{j2\pi(F_0+F_L)}]$

Et : $Z_2(\nu) = \frac{\alpha}{4}[X_0(\nu - (F_0 - F_L)) + X_0^*(-\nu - (F_0 - F_L))] \leftrightarrow z_2(t) = \frac{\alpha}{2}\Re[x_0(t)e^{j2\pi(F_0-F_L)}]$

Puis on filtre passe-bande centré sur $F_0 + F_L$. On obtient alors en sortie du filtre : $w(t) = z_1(t)$.

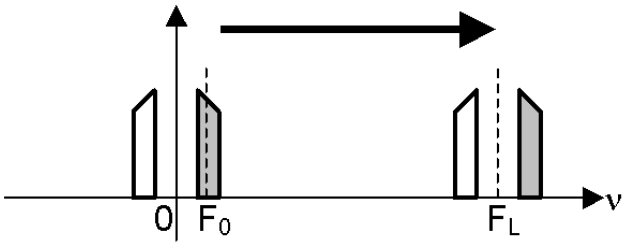


FIGURE 1.6 – Changement de fréquence.

1.3.4.3 Ampli sélectif accordable

Utilisation d'un filtre passe-bande centré en F_I (fréquence intermédiaire) et de BP $\Delta\nu$. On fait varier F_L alors que F_I =cte. Seuls passent les signaux $x_i(t)$ tels que : $F_i - F_L = F_I \Rightarrow \boxed{F_i = F_I + F_L}$. Utilisé dans les récepteurs radio hétérodynes.

1.3.4.4 Multiplexage en fréquence

Le signal de parole est un signal à bande étroite.
Application aux signaux téléphoniques : BP : $[f_{min} = 300Hz; f_{max} = 3400Hz]$ On multiplie chaque

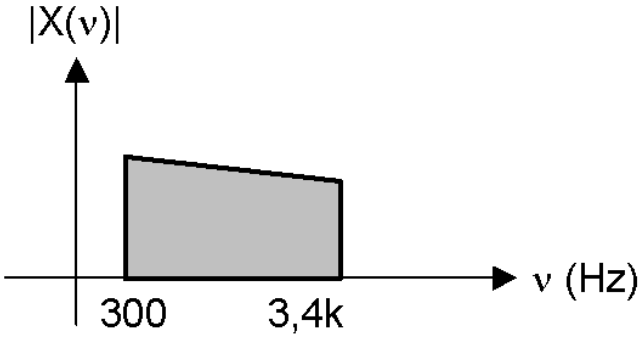


FIGURE 1.7 – Spectre du signal de parole.

signal par un oscillateur local de fréquence différente F_L.
On ajoute un filtre passe-bande centré en $\pm\left(F_L + \frac{f_{max}+f_{min}}{2}\right)$ et de largeur : $\Delta\nu = f_{max} - f_{min}$.

Pour mélanger plusieurs signaux, on utilise plusieurs fréquences locales F_K bien choisies.

Pour que les spectres soient disjoints : $F_K + f_{max} < F_L + f_{min} \Rightarrow F_L - F_K > f_{max} - f_{min} = \Delta\nu = 3.1kHz$

En fait, on prend une marge de sécurité : standard des PTT : $F_L - F_K = 4kHz$. Sur un câble téléphonique, il passe 2700 voies. Le signal multiplexé est l'ensemble des signaux. Le spectre s'étale jusqu'à 12MHz.

Restitution : on remultiplie par le même oscillateur local adhoc et on filtre passe-bas pour éliminer la fréquence double $2F_L$.

1.4 Applications

1.4.1 Filtrage

Intérêt : Débruitage, Extraction de signaux

1.4.1.1 Passe-bas (Intégrateur)

Exemple du filtre RC 1er ordre (voir Fig. 1.8a)

1.4.1.2 Passe-haut (Dérivateur)

Exemple du filtre CR 1er ordre (voir Fig. 1.8b)

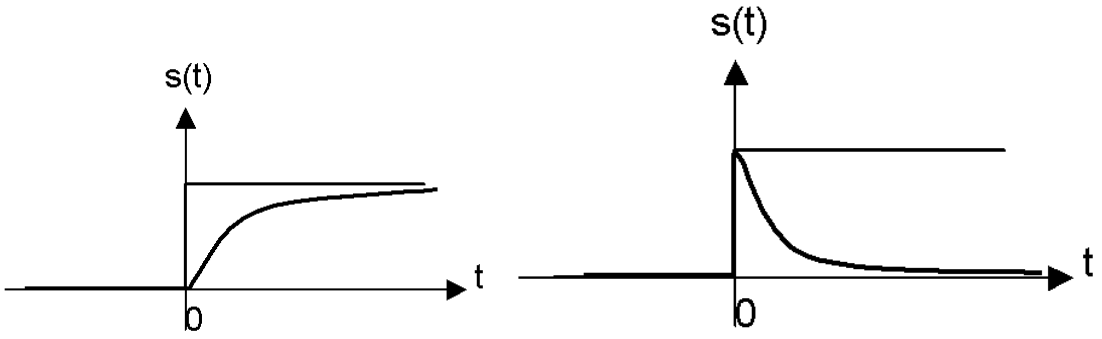


FIGURE 1.8 – Réponse impulsionnelle : a) Passe-bas ; b) Passe-haut.

1.4.1.3 Passe-bande

voir Signaux à bande étroite.

1.4.2 Modulation

Les signaux qui transportent l'information ont un spectre limité : $f_{min} < \nu < f_{max}$. Pour envoyer plusieurs signaux dans la même direction (même câble ou radio), on rend les spectres disjoints en faisant des signaux à BE concentrés autour de différentes porteuses $F_0 \gg f_{max}$.

Intérêt : Porter de l'info.

1.4.2.1 Modulation d'amplitude

Un signal modulé en amplitude s'exprime par :

$$s(t) = [1 + Km(t)]\, p(t) \tag{1.44}$$

où :

- K est le taux de modulation variable de 0 à 100% (typ. $K = 50\%$)
- $m(t)$ est le signal BF modulant contenant l'information (où $\nu < f_{max}$).
- $p(t)$ est la porteuse HF : $p(t) = A_p \cos 2\pi f_p t$ (où $f_p \gg f_{max}$).

Prenons ici le cas d'école : $m(t) = \cos 2\pi f_m t$

Alors : $s(t) = \Re[A_p(1 + K\cos(2\pi f_m t))e^{j2\pi f_p t}]$

On obtient trois raies fréquentielles : f_p, $f_p - f_m$ et $f_p + f_m$.

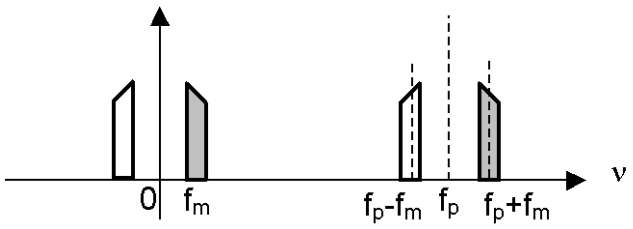


FIGURE 1.9 – Spectre en modulation d'amplitude.

1.4.2.1.1 Démodulation : On utilise un détecteur d'enveloppe (circuit Diode + RC). Un bon fonctionnement correspond à une valeur de constante de temps $\tau = RC$ telle que :

$$\frac{1}{f_p} \ll \tau \ll \frac{1}{f_{max}}$$

Démonstration cf TD

1.4.2.2 Modulation de fréquence

1.4.2.2.1 Fréquence instantanée : Soit $s(t) = A\cos\phi(t)$.
On appelle fréquence instantanée : $F(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{d\phi(t)}{dt}$.
Un signal est modulé en fréquence si : $F(t) = F_0 + \Delta F.m(t)$ où $m(t)$ est le signal modulant et ΔF l'excursion en fréquence.

Dans le cas d'école où : $m(t) = \cos\omega t = \cos 2\pi f t$, alors :

$$\phi(t) = 2\pi F_0 t + \frac{\Delta F}{f}\sin 2\pi f t.$$

$m = \frac{\Delta F}{f}$ est l'indice de modulation.

1.4.2.2.2 Spectre : Le spectre n'est pas borné, mais fait intervenir les fonctions de Bessel $J_n(m)$. (NB : $\lim_{n\to\infty} |J_n(m)| = 0$)
$\Delta\nu = 2(f_{max} + \Delta F)$
On prend en général : $m_{min} = \frac{\Delta F}{f_{max}} > 2$ (typ. $m_{min} = 5$).

Signal musical monophonique : $30Hz < f < 15kHz \Rightarrow \Delta F = 75kHz$. Donc $\Delta\nu = 180kHz$ (prend plus de place qu'en AM.)

1.4.2.2.3 Réalisation : oscillateur commandé en tension (VCO) fait avec une diode varactor (cf. oscillateur LC accordé à : $\omega = 1/\sqrt{C(t)L}$)

1.4.2.2.4 Démodulation : détecteur quadratique, détecteur de Foster-Seeley.

1.4.3 Analyse spectrale

1.4.3.1 But

Extraire de l'info sur les fréquences (et les énergies correspondantes) présentes dans un signal.

1.4.3.2 Principe

Filtrer le signal à travers un filtre passe-bande très sélectif et accordable (i.e. dont on fait varier la fréquence centrale).

Cas d'un filtre passe-bande idéal centré en F_0 et de bande étroite $\Delta\nu$: $H_+(\nu) = \sqcap_{\Delta\nu}(\nu - F_0)$.
Des relations des filtres Eq. (1.39) et (1.42), on déduit que :

$$E_s = 2\int_0^\infty |H(\nu)|^2.|E(\nu)|^2 d\nu = 2\int_{F_0-\Delta\nu/2}^{F_0+\Delta\nu/2} |E(\nu)|^2 d\nu \tag{1.45}$$

Si $E(\nu) \approx cte = E(F_0)$ sur $\Delta\nu$, alors :

$$E_s \approx 2\Delta\nu|E(F_0)|^2 \tag{1.46}$$

$$P_{moy} \approx 2\Delta\nu\Gamma_e(F_0) \tag{1.47}$$

1.4.3.3 Mise en œuvre

Accord $F_0 = F_I - F_L$ par changement de fréquence : oscillateur local F_L variable, et filtre sélectif fonctionnant à fréquence intermédiaire fixe F_I =cte $(0 < F_L < F_I)$.

On peut ainsi analyser dans la gamme de fréquences : $0 < \nu < F_I$.

1.4.3.4 Résolution fréquentielle

1.4.3.4.1 Pouvoir de résolution : La précision augmente quand $\Delta\nu$ diminue.
$F_0 - \Delta F < \nu < F_0 + \Delta F$
$\boxed{\Delta F = \frac{\Delta\nu}{2}}$

1.4.3.4.2 Troncature temporelle : La mesure à la fréquence $\nu = F_0$ se fait sur une durée d'observation T :

$$x_T(t) = x(t).\sqcap_T(t)$$

Si $TF_0 \gg 1$ et si l'on néglige les lobes secondaires du sinus cardinal, alors on obtient :

$$\Delta F = \frac{1}{T} + \frac{\Delta\nu}{2} \tag{1.48}$$

En général, on choisit $1/T \approx \Delta\nu/2$.

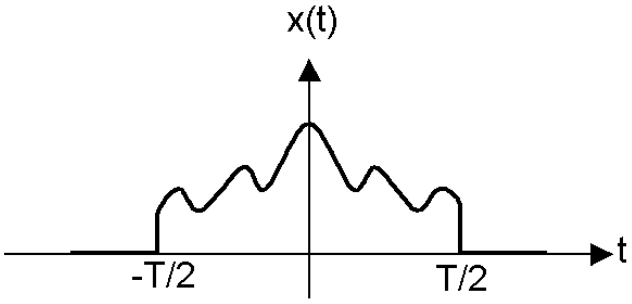


FIGURE 1.10 – Troncature temporelle.

1.4.3.4.3 Exemple des audio-fréquences ($\nu < 20kHz$) : on veut une précison de $\Delta F = 100Hz \Rightarrow T_{min} = 20ms$.
Nb de points de mesure : $N = \frac{20kHz}{100Hz} = 200$
Temps de mesure : $T_{obs} = 200T_{min} = 4sec$
Si on réduit le temps de mesure à $T_{min}/10$ alors $\Delta F = 500Hz$ déplorable.

1.5 Signaux aléatoires : caractérisation et filtrage

Variable et fonction aléatoires, Fonction de répartition, Densité de probabilité, Fonction caractéristique, Moments, Processus stationnaires, ergodiques, faiblement stationnaires.

1.6 Bruit

Bruit blanc, Bruit thermique, Facteur de bruit.

1.7 Filtrage optimal et détection

TD T.S. ANALOGIQUE

1.8 TD1 - Signal Radar

Un signal radar $s(t)$ est constitué d'un train d'impulsions rectangulaires qui module en amplitude une porteuse $K\cos(2\pi f_p t)$ de fréquence f_p.

L'impulsion rectangulaire de base, centrée, de largeur T, vaut : $x(t) = A \sqcap_T (t)$.

Soit f_r la fréquence de répétition des impulsions qui forment le train infini d'impulsions noté $y(t)$.

1. Calculer la fonction d'autocorrélation $c_x(\tau)$ de $x(t)$ et donner les transformées de Fourier respectives $C_x(\nu)$ et $X(\nu)$.
2. Donner l'expression du train d'impulsions $y(t)$ et de sa TF $Y(\nu)$.
3. Dans le cas d'une seule impulsion modulante $x(t)$, donner l'expression d'un signal radar $s_0(t)$ et de sa TF $S_0(\nu)$.
4. Même question dans le cas du train d'impulsions $y(t)$ qui module la porteuse pour former le signal complet $s(t)$. On notera $S(\nu)$ sa transformée .
5. A la réception, on ne dispose du signal radar que sur une durée d'observation limitée D. C'est-à-dire qu'on reçoit le signal $z(t) = s(t).\sqcap_D (t)$. Calculer d'abord et représenter la fonction spectrale $W(\nu)$ correspondant au signal modulant tronqué : $w(t) = y(t).\sqcap_D (t)$. En déuire la TF $Z(\nu)$ correspondant au signal radar tronqué $z(t)$.

1.9 TD2 - Corrélateur analogique

Soit $x(t)$ un signal réel de puissance moyenne finie dont on veut estimer la fonction d'autocorrélation $\gamma_x(\tau)$.

1. Donner le schéma de principe d'un corrélateur analogique.
   NB : on appelera $y(t)$ le signal en sortie du multiplieur et $z(t)$ le signal après l'intégrateur.
2. L'intégrateur est un filtre RC passe-bas élémentaire. Calculer sa fonction de transfert $H(\nu)$ et sa réponse impulsionnelle $h(t)$.
3. On considère maintenant le cas où : $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t)$. Calculer alors $\gamma_x(\tau)$.
4. Calculer la tension $z(t)$ en sortie du corrélateur. La comparer à $\gamma_x(\tau)$.
5. A quelle condition (portant sur la fréquence de coupure f_c du filtre intégrateur) la fluctuation de $z(t)$ par rapport à sa moyenne est-elle inférieure à $\epsilon\gamma_x(0)$, où $\epsilon \ll 1$?
   A.N. : $f_0 \geq 10Hz$ et $\epsilon = 1\%$
6. On veut déterminer le temps de mesure nécessaire pour obtenir une bonne approximation de $\gamma_x(\tau)$. Le signal $x(t)$ est appliqué pour $t > 0$. La partie oscillante de $z(t)$ est supposée d'amplitude négligeable (par suite du filtrage). Exprimer la réponse $z_1(t)$ du filtre à la partie apériodique $y_1(t)$ de $y(t)$.
7. Déterminer le temps T tel que pour $t \geq T$: $(1-\epsilon)\gamma_x(\tau) \leq z_1(t) < \gamma_x(\tau)$
8. A.N. : $f_0 = 10Hz$; le retard maximal étant $\tau_M = 1/f_0$, calculer T pour que l'erreur relative soit inférieure à $\epsilon = 1\%$ si $f_c = f_0/50$.

Chapitre 2

TRAITEMENT DE SIGNAL NUMERIQUE

2.1 Introduction

2.1.1 Généralités

On s'intéresse au cas d'un signal numérique monodimensionnel et causal (suite numérique d'échantillons $x(nT_e)$ pour $n \geq 0$). La variable temporelle est échantillonnée $t = nT_e$ (période d'échantillonnage T_e) et l'amplitude est quantifiée (avec un pas de quantification q). Sans perte de généralité, on prend souvent $T_e = 1$ dans l'étude théorique pour normaliser les échelles. Evidemment, dans la pratique, la valeur de T_e est une caractéristique essentielle d'un système puisqu'elle définit sa cadence de fonctionnement. Entre deux instants d'échantillonnage, le signal n'est pas nul : il est non défini. On notera indifféremment un signal numérique : $x(t) = x(nT_e) = x(n) = x_n$.

On présente ici les opérations de base sur les signaux numériques, les outils d'analyse et de synthèse des signaux et filtres numériques (TFDT, TFD, TZ et corrélation), les problèmes liés à l'arithmétique utilisée (quantification et cycles limites), enfin les systèmes de traitement et leurs applications (filtrage et analyse spectrale) [2, 1, 3].

2.1.2 Outils mathématiques

2.1.2.1 Transformée de Fourier discrète dans le temps TFDT et spectre

La transformée de Fourier décompose le signal sur la base des exponentielles complexes :

$$X(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \exp(-j2\pi n\nu) \tag{2.1}$$

Cette série converge pour tout signal d'énergie finie :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2 \quad \exists \tag{2.2}$$

$X(\nu)$ est périodique de période unité (ou période $Fe = \frac{1}{T_e}$ si non normalisé). Son DSF donne la transformée inverse :

$$x(n) = \int_{-1/2}^{+1/2} X(\nu) \exp(+j2\pi\nu n) d\nu \tag{2.3}$$

Si l'on prend en compte T_e, alors l'intégration se fait sur la période principale : $[-F_e/2, F_e/2]$. On appelle **spectres d'amplitude, de phase et d'énergie** resp. $|X(\nu)|$, $\arg[X(\nu)]$ et $|X(\nu)|^2$.

2.1.2.2 TFD et Transformée en Z

N.B. : Sur le cercle unité $z = \exp(j2\pi\nu)$, la TZ s'identifie à la TFDT normalisée .
Calcul de la TZ inverse : $x(n) \leftrightarrow X(z)$
- développement en fractions partielles et utilisation des tables
- développement en série de puissance de z^{-1}
- développement par division
- théorème des résidus

N.B. : Propriété complémentaire de la TZ : $x(-n) \leftrightarrow X(1/z)$

2.1.3 Systèmes numériques

2.1.3.1 Equation aux différences

On s'intéresse aux systèmes linéaires (principe de superposition).
Cas particulier de système linéaire régi par une équation aux différences (cf. équation différentielle) :

$$\sum_{i=0}^{N} a_i(n)s(n-i) = \sum_{j=0}^{M} b_j(n)e(n-j) \tag{2.4}$$

2.1.3.2 Produit de convolution discret

Le signal de sortie se calcule par convolution discrète :

$$s(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e(k)h(n-k) \tag{2.5}$$

$$S(\nu) = E(\nu)H(\nu) \tag{2.6}$$

$$s(n) = e(n) * h(n) \leftrightarrow S(z) = E(z)H(z) \tag{2.7}$$

2.1.3.3 Fonction de Transfert

$$H(z) = TZ[h(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)z^{-n} \tag{2.8}$$

Converge dans un anneau du plan complexe z (cf. critère de Cauchy).

2.2 Signaux numériques

2.2.1 Les 4 opérations de base

1. somme de signaux numériques
2. produit de signaux
3. multiplication d'un signal par une constante
4. décalage d'un signal (retard ou avance) : $y(n) = x(n - n_0)$

A partir de ces lois, on exprime un signal numérique comme une somme pondérée d'impulsions décalées :

$$f^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f(t)\delta(t - nT_e) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT_e)\delta(t - nT_e) \tag{2.9}$$

2.2.2 Signaux élémentaires et typologie

- impulsion unité $d(n) = 1$ si $n = 0$ (0 sinon) (cf. symbole de Kronecker)
- échelon unité $H(n) = \sum_{n=0}^{\infty} d(n)$
- porte ou fenêtre rectangulaire $\sqcap_N(n)$
- sinusoïde
- exponentielle $x(n) = a^n$
- exponentielle complexe $x(n) = \exp[(\alpha + j2\pi\nu)n]$
- signal périodique : $x(n + N) = x(n)$
- signal à durée limitée ou illimitée

2.2.3 Corrélation

Mesure la **similitude** entre signaux :

$$\phi_{xy}(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y(n+k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n-k)y(n) = \phi_{yx}(-k) \tag{2.10}$$

$$TF[\phi_{xy}(k)] = \Phi_{xy}(\nu) = X^*(\nu)Y(\nu) \tag{2.11}$$

$$\phi_{xx}(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2(n) = \int_{-1/2}^{+1/2} \Phi_x(\nu)d\nu \tag{2.12}$$

$$\phi_{xy}(k) \leftrightarrow \Phi_{xy}(z) = \sum_n x(n)z^n \sum_m y_m z^{-m} = X(1/z)Y(z) \tag{2.13}$$

2.2.4 Echantillonnage

L'échantillonnée idéale à la fréquence $F_e = 1/T_e$ est donnée par :

$$v(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e)\delta(t - kT_e) \tag{2.14}$$

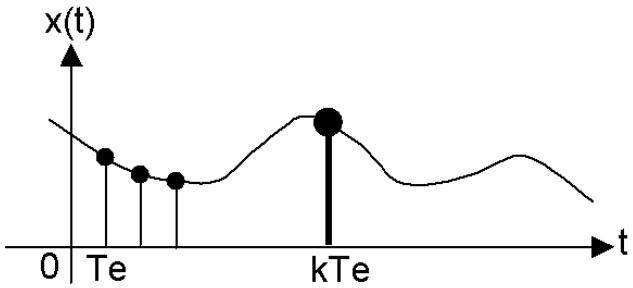


FIGURE 2.1 – Echantillonnage idéal.

2.2.4.1 Théorème de Shannon

Le théorème de Shannon stipule qu'il faut respecter la condition : $\boxed{F_e > 2F_{max}}$. On peut alors reconstituer le signal $x(t)$ par un filtrage passe-bas idéal de fréquence de coupure $f_c = F_e/2$ (interpolation). Dans le cas contraire, on a **repliement de spectre** (cf. §TFD).

2.2.4.2 Echantillonnage naturel

$$w(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sqcap_\tau(t - kT_e) = x(t).\left[\sqcap_\tau(t) * \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e)\right] \tag{2.15}$$

2.2.4.3 Echantillonneur bloqueur

$$w(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) \sqcap_\tau (t - kT_e) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) \sqcap_\tau (t) * \delta(t - kT_e) = \sqcap_\tau(t) * v(t) \tag{2.16}$$

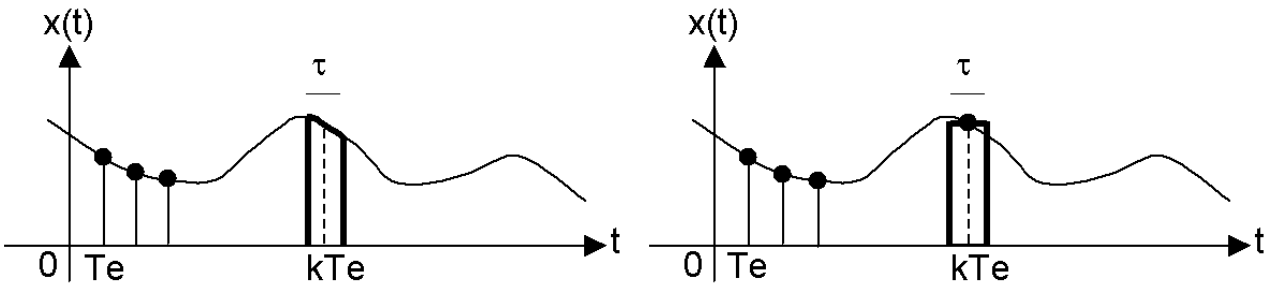


FIGURE 2.2 – a) Echantillonnage naturel ; b) Echantillonneur-bloqueur.

2.2.5 Quantification

L'influence de la quantification est modélisée par une source de bruit additif. On traite l'erreur de quantification par arrondi comme une variable aléatoire de densité de probabilité uniforme $1/q$ sur l'intervalle des erreurs possibles $[-q/2, +q/2]$:

$$x(n) = Q[x(n)] + b(n) \tag{2.17}$$

$$\mu_b = 0 \tag{2.18}$$

$$\sigma_b^2 = \frac{q^2}{12} \tag{2.19}$$

On définit le rapport signal sur bruit de quantification :

$$\rho = 10 \log_{10} \frac{P_x^2}{\sigma_b^2}$$

Pour une quantification sur m bits, on montre que $\rho \approx 6m$ dB. On voit donc qu'avec un nombre de bits suffisant, on peut négliger le bruit de quantification.

Par contre, le phénomène des **cycles limites** peut être très gênant : solution périodique en l'absence de signal d'entrée, due notamment aux conditions initiales du filtre.

2.3 Filtres numériques

2.3.1 Causalité et stabilité

$$s(k) = \sum_{n=0}^{k} e(n)h(k-n) \tag{2.20}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |h(n)| < \infty \tag{2.21}$$

cf. TD

2.3.2 Système SLIT

Un système linéaire invariant dans le temps (SLIT) a pour fonction de transfert une fraction rationnelle en z dont les pôles sont à l'intérieur du cercle unité :

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{j=0}^{M} b_j z^{-j}}{\sum_{i=0}^{N} a_i z^{-i}} \tag{2.22}$$

Il est donc régi dans le domaine temporel par une équation de récurrence linéaire (cf. théorème du

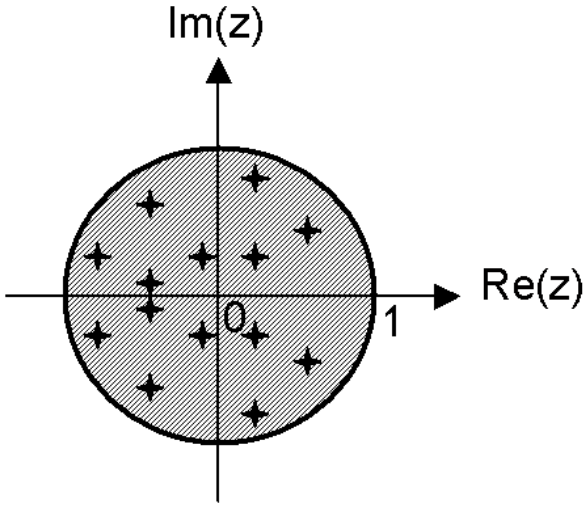


FIGURE 2.3 – Critère de stabilité.

retard) :

$$\sum_{i=0}^{N} a_i s(n-i) = \sum_{j=0}^{M} b_j e(n-j) \tag{2.23}$$

Un filtre causal et stable est défini par sa réponse impulsionnelle $h(n)$ ou sa fonction de transfert en z $H(z)$ ou par sa TFD $H(k)$:

$$s(n) = \sum_{k=0}^{N-1} e(k)h(n-k) \qquad \text{pour } n \geq N-1 \tag{2.24}$$

$$S(z) = H(z).E(z) \tag{2.25}$$

$$S(k) = H(k).E(k) \tag{2.26}$$

Les Eq. ci-dessus permettent de définir trois méthodes différentes de réalisation d'un filtre numérique : structure récursive (Eq. 2.23), structure transversale (2.24) ou gabarit fréquentiel (2.26). Les circuits comportent des sommateurs, des multiplieurs par une constante et des retards.

2.3.3 Synthèse d'un filtre RIF

Un filtre à Réponse Impulsionnelle Finie a pour fonction de transfert un simple polynôme : $H(z) = B(z)$. On utilise souvent la réalisation transversale (canonique directe) ou une structure en cascade résultant de la factorisation de $H(z)$ en polynômes de deuxième degré :

$$H(z) = \prod_{m=1}^{(N-1)/2} \left(1 + a_{m_1} z^{-1} + a_{m_2} z^{-2}\right) \tag{2.27}$$

Les méthodes de synthèse sont [4] :

- synthèse par série de Fourier : calcul de $h(n)$ à partir de $H(\nu)$ (cf. Eq. 2.3)
- méthode d'échantillonnage en fréquence (emploi de la TFD, mais phénomène de Gibbs)
- optimisation linéaire : algorithme de Remez (contraintes de degré minimal et de phase linéaire, meilleure approximation au sens de Tchebycheff)

Exigence de filtrage :

- gabarit sur l'affaiblissement (ou le gain) : passe-bas, passe-bande, passe-haut, coupe-bande
- déphasage linéaire : retard de groupe $\tau = d\phi/d\omega =$ cte.

La fonction de transfert vérifie :

$$H(e^{j\omega}) = G(\omega)e^{-j[\phi(0)+\tau\omega]} \tag{2.28}$$

$$H(z^{-1}) = \pm z^{N-1}H(z) \tag{2.29}$$

Donc les zéros apparaissent par paires complexes conjuguées : $z_0, z_0^*, z_0^{-1}, z_0^{*-1}$.

2.3.4 Synthèse d'un filtre RII

1. Transposition analogique (TL) $\leftrightarrow$ numérique (TZ) : correspondance $z \leftrightarrow p$
   - **équivalence de la dérivation** :

$$y(n) = \frac{x(n) - x(n-1)}{T_e} \tag{2.30}$$

$$p = \frac{1 - z^{-1}}{T_e} \tag{2.31}$$

   L'axe imaginaire $p = j\omega$ se transforme en le cercle de centre $z_0 = 1/2$ et de rayon $R = 1/2$. L'équivalence n'est satisfaisante qu'au voisinage de $z = 1$ (suppose une valeur de F_e élevée).
   - équivalence de l'intégration (règle trapézoïdale) dite **transformation bilinéaire** :

$$y(n) = y(n-1) + \frac{x(n) + x(n-1)}{2}T_e \tag{2.32}$$

$$\frac{1}{p} = \frac{T_e}{2}\frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}} \tag{2.33}$$

$$f_a = \frac{1}{\pi T_e}\tan(\pi f_d T_e) \tag{2.34}$$

   L'image de l'axe imaginaire en p est le cercle unité en z (compatible avec l'échantillonnage, mais loi non linéaire entre fréquence analogique f_a et fréquence numérique f_d).
   - **échantillonnage de la réponse impulsionnelle** :

$$H(p) = \sum_{j=1}^{N} \frac{\alpha_j}{p - p_j} \Leftrightarrow H(z) = \sum_{j=1}^{N} \frac{\alpha_j}{1 - \exp(p_j T_e)z^{-1}}$$

2. Algorithmes complexes d'optimisation par ordinateur : minimisation de l'erreur d'approximation entre filtre désiré et filtre réalisable.

2.4 Filtrage

2.4.1 Linéaire

Exemple du filtre passe-bas moyenneur :

$$y(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x(n-k)$$

impossible de supprimer une impulsion tout en conservant fidèlement un échelon.

2.4.2 Non-linéaire

Exemple du filtre médian à l'échelle N :

$$y(n) = \text{med}[x(n-N), x(n-N+1), \cdots, x(n+N)]$$

où med[...] représente le nombre qui se trouve au milieu après avoir ordonné les $2N+1$ valeurs par ordre croissant.

Intérêt principal du filtrage non-linéaire : le filtrage par la valeur médiane élimine complètement une impulsion unité et laisse passer un échelon sans modification.

En pratique, on combine souvent filtre médian et filtre linéaire pour profiter des avantages des deux types de filtres.

2.5 Analyse spectrale

2.5.1 Autocorrélation

Le spectre d'un signal $s(n)$ est la TF de la fonction d'autocorrélation $\phi_s(n)$ du signal :

$$|S(\nu)|^2 = \Phi_s(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \phi_s(n) e^{-j2\pi\nu n} \tag{2.35}$$

La fonction d'autocorrélation de la sortie d'un système est le produit de convolution des fonctions d'autocorrélation de l'entrée et de la réponse impulsionnelle :

$$\phi_s(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \phi_e(n-k)\phi_h(k) \tag{2.36}$$

$$\Phi_s(z) = H(z)H(\frac{1}{z})\Phi_e(z) \tag{2.37}$$

$$\text{cf. TS analogique : } \Phi_s(\nu) = |H(\nu)|^2\Phi_e(\nu) \tag{2.38}$$

La technique dite du corrélogramme est donc un moyen de calculer le spectre d'un signal.

2.5.2 Méthode non-paramétrique

Méthode du périodogramme moyenné : la DSE est approximée par

$$\hat{\Phi}(k) = \frac{1}{N}\left|\sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi\frac{nk}{N}}\right|^2 \tag{2.39}$$

On calcule donc le module au carré de la TFD du signal (avec l'algorithme rapide de FFT).

Attention :

- troncature temporelle $\leftrightarrow$ choix de fenêtres de pondération (Hanning, Hamming, Blackman) $\leftrightarrow$ **Limite de Résolution fréquentielle**
- Echantillonnage temporel $\Leftrightarrow$ Périodisation du spectre $\leftrightarrow$ **Risque de repliement de spectre**

2.5.3 Méthode paramétrique

On modélise le signal comme la sortie d'un filtre RII dont l'entrée est un bruit blanc de variance σ^2. On parle alors de processus ARMA (*autoregressive - moving average*) :

$$\hat{\Phi}(\nu) = \frac{|B(\nu)|^2}{|A(\nu)|^2}\sigma^2$$

Des algorithmes des moindres carrés permettent d'estimer les paramètres du modèles (coefficients a_i et b_j). Le problème crucial est le choix de l'ordre du processus (degrés du numérateur $B(z)$ et du dénominateur $A(z)$).

Intérêt : **Meilleure résolution fréquentielle**.

TD T.S. NUMERIQUE

2.6 TD3 - Synthèse d'un filtre RII

Pour élaborer un filtre numérique, on peut exploiter la théorie et les techniques de synthèse des filtres analogiques. Une méthode couramment utilisée pour passer de la fonction de transfert analogique $H_A(p)$ à la fonction de transfert numérique $H_N(z)$ est la transformation bilinéaire :

$$p = K\frac{z-1}{z+1}$$

Cette transformation a notamment pour avantage de conserver les propriétés essentielles du filtre analogique, dont la stabilité.

Par ailleurs, lorsqu'on utilise $H_N(z)$ pour filtrer un signal numérique issu de l'échantillonnage d'un signal analogique avec une fréquence d'échantillonnage F_e, la fonction de transfert équivalente vis-à-vis du signal analogique est : $H(f) = H_N(e^{j\theta})$ où $\theta = 2\pi f/F_e$.

1. Montrer que pour la transformation définie ci-dessus, lorsque $p = j2\pi\nu$ avec ν variant de $-\infty$ à $+\infty$, la trajectoire de z est le cercle unité $z = e^{j\theta}$ dans le plan z. En déduire la relation entre la fréquence numérique f et la fréquence analogique ν. En donner une représentation graphique.
2. On définit le filtre numérique par $H_N(z) = H_A\left(K\frac{z-1}{z+1}\right)$. En déduire l'allure de $|H(f)|$ en fonction de celle de $|H_A(j2\pi\nu)|$.

   Application : On veut synthétiser un filtre numérique réjecteur à partir d'un filtre analogique dont la fonction de transfert de Laplace est :

$$H_A(p) = \frac{1}{2}\frac{(2\pi\nu_0)^2 + p^2}{(2\pi\nu_0)^2 + 2\zeta(2\pi\nu_0)p + p^2} \text{ avec : } 2\pi\nu_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ et : } \zeta = \frac{R}{4}\sqrt{\frac{C}{L}}$$

3. Donner schématiquement la variation de $|H_A(j2\pi\nu)|$.
4. Déterminer la constante K pour avoir $H(f) = 0$ pour $f = \pm F_e/4$.
5. Montrer que $H_N(z)$ correspond à un filtre récursif dont on donnera le diagramme de calcul.
6. Vérifier que ce filtre est réalisable.
7. A quelle condition le filtre numérique est-il stable ?

Chapitre 3

TRANSFORMEE DE FOURIER DISCRETE

3.1 Introduction [1]

Par abus de langage, on emploie souvent indifféremment les deux termes spectre et transformée de Fourier, sans se soucier de la phase de la transformée de Fourier. Mais en toute rigueur, le spectre d'un signal est le module au carré de sa transformée de Fourier.

L'analyse spectrale d'un signal analogique déterministe par une technique numérique comporte deux étapes essentielles :

- la conversion analogique-numérique du signal : c'est l'**échantillonnage**,
- le calcul de la **transformée de Fourier discrète** : TFD.

Ces deux étapes génèrent des distorsions qui peuvent perturber l'analyse. Pour interpréter correctement les spectres obtenus, il faut connaître l'origine et les conséquences de ces distorsions, ainsi que les techniques permettant de les minimiser. On étudiera d'abord les conséquences de l'échantillonnage temporel d'un signal, puis on mettra en évidence les problèmes posés par le recours à la TFD.

3.2 Conversion analogique-numérique

3.2.1 Échantillonnage et quantification

La conversion d'un signal analogique en une séquence de valeurs numériques, ou **signal numérique**, se divise en deux phases :

- la prise d'échantillons du signal à intervalles de temps réguliers dont la durée est appelée période d'échantillonnage T_e. Cet **échantillonnage temporel** peut induire des distorsions gênantes si les conditions du *théorème de Shannon* ne sont pas vérifiées (§ 3.2.2).
- la **quantification** des valeurs des échantillons ainsi prélevés, avec un écart maximal entre la valeur réelle et la valeur stockée qui dépend du nombre de bits dont dispose le convertisseur analogique-numérique. Si le signal a un spectre suffisamment étendu, on assimile les conséquences de cette quantification à la *superposition d'un bruit blanc* sur le signal d'origine. Si le nombre de bits du calculateur est suffisant et si l'amplitude du signal à analyser est assez forte, on peut considérer que le rapport signal sur bruit de quantification est très grand, et négliger les effets de la quantification.

3.2.2 Echantillonnage temporel

Considérons un signal analogique $x_a(t)$ de transformée de Fourier $X_a(f)$. Notons $x_e(t)$ le signal résultant de l'échantillonnage de $x_a(t)$ à la fréquence $F_e = 1/T_e$. Il est défini par :

$$\begin{cases} x_e(t) = x_a(t) = x_n & \text{si } t = nT_e \\ x_e(t) = 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{3.1}$$

On peut écrire :

$$x_e(t) = x_a(t).e(t) \tag{3.2}$$

où $e(t)$ est le peigne de Dirac de période T_e :

$$e(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e) \tag{3.3}$$

Soit $E(f)$ la transformée de Fourier de $e(t)$:

$$E(f) = F_e \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - kF_e) \tag{3.4}$$

La transformée de Fourier $X_e(f)$ de $x_e(t)$ est donnée par le produit de convolution :

$$X_e(f) = X_a(f) * E(f) = X_a(f) * F_e \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - kF_e) \tag{3.5}$$

soit :

$$X_e(f) = F_e \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_a(f - kF_e) \tag{3.6}$$

Le spectre du signal échantillonné correspond donc, au facteur multiplicatif F_e près, à la périodisation à période F_e du spectre $X_a(f)$ du signal analogique. Nous allons voir que cette **périodisation spectrale** peut introduire une distorsion du spectre dans la bande de fréquences considérée, à savoir $]-F_e/2; F_e/2[$.

Supposons d'abord que $X_a(f) = 0$ pour $|f| > F_m$ où F_m est la fréquence maximale du signal. Selon le théorème de Shannon, si $x_a(t)$ est un signal d'**énergie finie**, on peut retrouver sans distorsion le signal $x_a(t)$ à partir du signal échantillonné $x_e(t)$ si et seulement si :

$$F_e \geq 2F_m. \tag{3.7}$$

Dans ce cas (Fig. 3.1), les spectres $X_a(f)$ et $X_e(f)$ coïncident parfaitement sur l'intervalle $]-F_e/2; F_e/2[$, et la périodisation spectrale liée à l'échantillonnage temporel n'a pas de conséquence sur l'analyse spectrale du signal étudié.

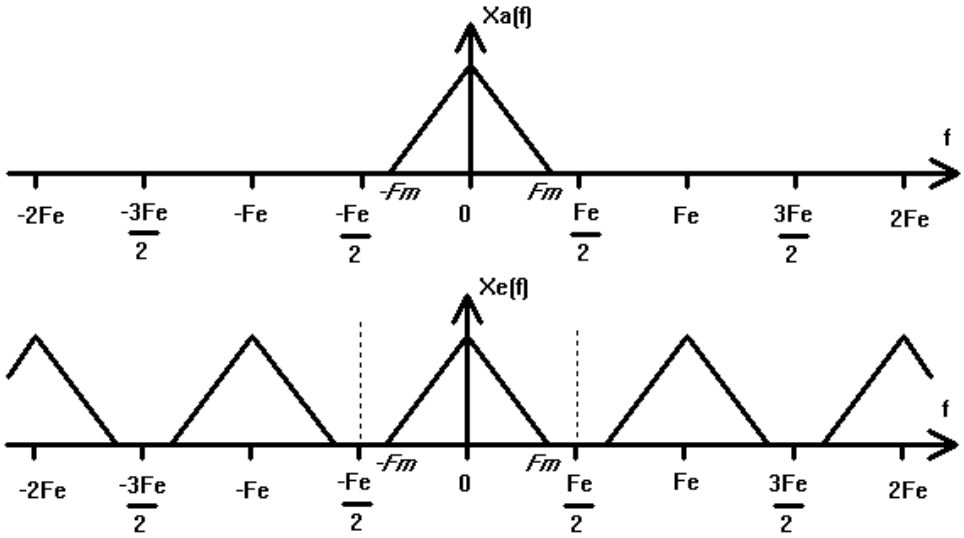


FIGURE 3.1 – Respect du théorème de Shannon : aucune distorsion dans la bande $]-F_e/2; F_e/2[$.

Par contre, si $F_e < 2F_m$ ou bien si le signal n'est pas à spectre borné, il y a **recouvrement** ou **repliement de spectre** (Fig. 3.2) Les deux spectres $X_e(f)$ et $X_a(f)$ ne coïncident plus sur l'intervalle $]$ -$F_e/2$; $F_e/2$ $[$: on a un rehaussement d'énergie en bouts de bande autour de $\pm F_e/2$. La distorsion liée à la périodisation spectrale est alors telle que l'analyse de Fourier du signal échantillonné ne permet pas d'avoir une bonne description du spectre du signal analogique. On ne pourra pas reconstituer correctement le signal analogique à partir de ses échantillons.

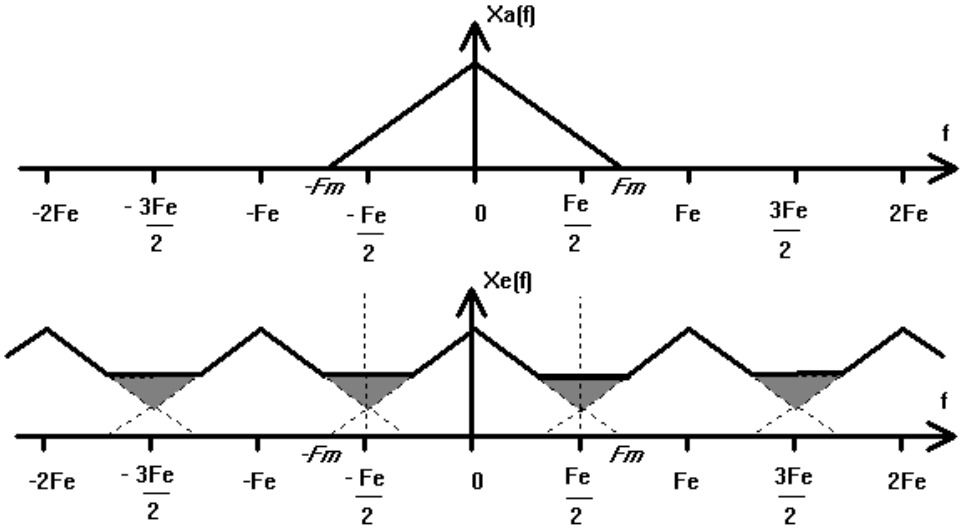


FIGURE 3.2 – Recouvrement de spectre : distorsions dans la bande $]-F_e/2; F_e/2[$.

3.3 Transformée de Fourier Discrète

3.3.1 TFDT d'un signal causal

Le signal $x_e(t)$, échantillonnée idéale de $x_a(t)$, peut s'écrire d'après (3.2) :

$$x_e(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n \delta(t - nT_e) \tag{3.8}$$

Donc la transformée de Fourier $X_e(f)$ du signal échantillonné $x_e(t)$ s'exprime par :

$$X_e(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n \exp(-j2\pi n f T_e) \tag{3.9}$$

Le signal $x_e(t)$ étant défini par une séquence discrète de valeurs x_n dans le temps, $X_e(f)$ est appelée **Transformée de Fourier Discrète dans le Temps (TFDT)**. Notons que dans cette expression, le temps est discrétisé tandis que la fréquence reste continue. Si le signal $x_e(t)$ est causal, c'est-à-dire que $x_n = 0$ pour $n < 0$, alors l'expression de la TFDT se simplifie :

$$X_e(f) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \exp(-j2\pi n f T_e) \tag{3.10}$$

Nous supposerons dans la suite que nous traitons toujours un signal causal.

3.3.2 Troncature temporelle

Pour une fréquence f donnée, le calcul sur ordinateur de la TFDT ci-dessus est possible si le signal est de durée finie (x_n est nul à partir d'un certain indice $n = N$). Par contre, si le signal est de durée *a priori* infinie, la TFDT n'est pas calculable sur ordinateur (somme infinie). Pour y remédier, il faut faire l'hypothèse qu'à partir d'un certain indice $n = N$, les échantillons x_n sont négligeables. Alors, l'expression de la TFDT $X_e(f)$ devient :

$$X_e(f) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \exp(-j2\pi n f T_e) \tag{3.11}$$

Cette démarche consistant à assimiler un signal de durée infinie à un signal de durée finie est appelée **troncature temporelle**. Elle peut avoir des conséquences spectrales fâcheuses si l'hypothèse sur la

faiblesse de l'amplitude des x_n pour $n \geq N$ est fausse. Du point de vue mathématique, la troncature revient à multiplier le signal $x_e(t)$ par une porte causale $\pi_T(t)$ de largeur $T = N.T_e$, qu'on appelle aussi **fenêtre rectangulaire**, définie par :

$$\begin{cases} \pi_T(t) = 1 & \text{si } t \in [0; (N-1)T_e] \\ \pi_T(t) = 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{3.12}$$

En d'autres termes, on assimile le signal $x_e(t)$ à un signal $x_T(t)$ défini par :

$$x_T(t) = x_e(t).\pi_T(t) \tag{3.13}$$

Ceci revient à assimiler la TFDT $X_e(f)$ à la TFDT $X_T(f)$, résultat de la convolution :

$$X_T(f) = X_e(f) * \Pi_T(f) \tag{3.14}$$

où $\Pi_T(f)$ est la transformée de Fourier de la porte de largeur T :

$$\Pi_T(f) = T\frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T}\exp(-j\pi f T) \tag{3.15}$$

N.B. L'exponentielle complexe $\exp(-j\pi f T)$, terme de déphasage dû au fait que la porte est causale centrée en $T/2$, ne modifie en rien le module de la transformée de Fourier.

Cette convolution par un sinus cardinal induit des distorsions caractérisées par un **élargissement spectral** et l'apparition d'**ondulations** dans le voisinage des zones de transition du spectre [1] (zones de fréquences où est concentrée l'énergie) : c'est ce que l'on appelle le **phénomène de Gibbs** (Fig. 3.3).

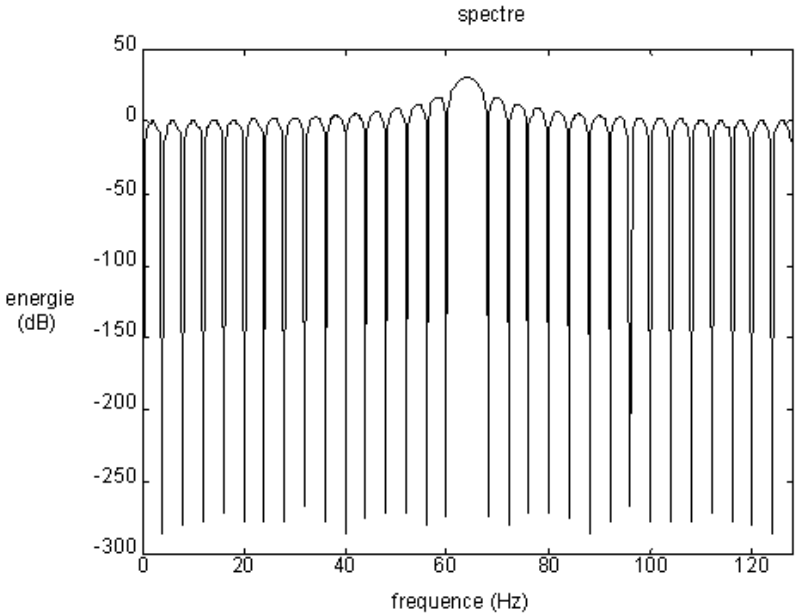


FIGURE 3.3 – Phénomène de Gibbs pour le spectre d'un sinus représenté sur l'intervalle $[0; F_e/2]$.

3.3.3 Echantillonnage fréquentiel - TFD

Pour une fréquence f donnée, on peut calculer la TFDT et contrôler dans une certaine mesure les distorsions liées au phénomène de Gibbs. Mais le calcul sur ordinateur de l'ensemble du spectre, autrement dit de la TFDT pour $f \in [0, F_e/2]$, n'est évidemment possible que pour un nombre fini de valeurs de la fréquence. Il faut donc échantillonner en fréquence la TFDT sur cet intervalle.

Compte tenu du théorème de Shannon, la durée du signal temporel analysé étant égale [2] à $T = N.T_e$, il suffit d'échantillonner la TFDT à une "fréquence" égale à $N.T_e$, ce qui revient à prendre un échantillon

1. Classiquement, on ne représente le spectre que dans l'intervalle [0 ; Fe/2] car on sait que pour les signaux réels, le spectre est symétrique par rapport à $f = 0$: $X(-f) = X^*(f)$, où * dénote le complexe conjugué.

2. N est le nombre d'échantillons du signal sans *zero-padding* (cf. commentaire sur la fft en annexe).

spectral tous les F_e/N. Le spectre ainsi échantillonné, représentation spectrale discrète d'un signal discret dans le temps, est appelé **Transformée de Fourier Discrète** (TFD). La TFD est alors donnée par les valeurs X_k définies par :

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \exp(-j\frac{2\pi nk}{N}) \tag{3.16}$$

Notons que dans cette expression, le temps **et** la fréquence sont échantillonnés. Cet échantillonnage fréquentiel peut avoir une influence notable sur l'allure du spectre.

Pour le calcul de la formule (3.16) sur ordinateur, il existe un algorithme rapide appelé FFT (Fast Fourier Transform) : FFT 1-D pour les signaux et FFT 2-D pour les images.

Chapitre 4

TRANSFORMEE EN Z

4.1 Introduction sur l'échantillonnage

Notons $f^*(t)$ la fonction échantillonnée (suite d'impulsions espacées de T_e) correspondant à une fonction continue $f(t)$. Il est intéressant de poser :

$$z = e^{pT_e} \tag{4.1}$$

dans l'expression de sa TL $\phi^*(p)$ car $\phi^*(p)$ est alors une fonction rationnelle de $\exp(pT_e)$. On obtient ainsi une Transformée en Z (en abrégé TZ).

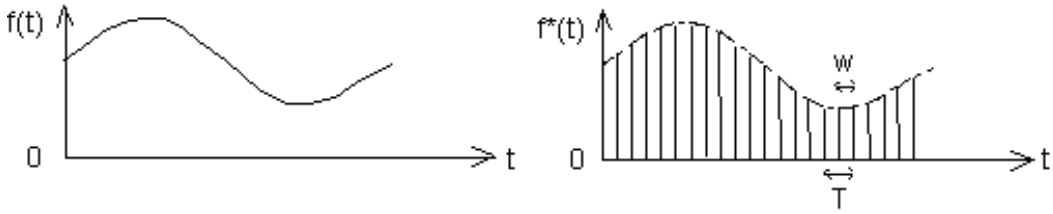


FIGURE 4.1 – Echantillonnage temporel

4.1.1 Rappel sur les distributions

4.1.1.1 Fonction d'échantillonnage (peigne de Dirac)

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e). \tag{4.2}$$

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & \text{pour } 0 < t < \varepsilon \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \tag{4.3}$$

4.1.1.2 Distribution

On appelle distribution T, une fonctionnelle sur D où D est l'EV des fonctions $\varphi(t)$ à valeurs complexes définies sur R, <u>indéfiniment dérivables</u> et à <u>support borné</u>.

$$T \quad : \quad \overset{D}{\varphi} \quad \rightarrow \quad \overset{C}{<T, \varphi>}$$

<u>Exemple :</u> $< T_F, \varphi > \quad = \quad \int_{-\infty}^{+\infty} F(t)\ \varphi\ (t)\, dt$

$$< \delta, \varphi > \quad = \quad < T_\delta, \varphi > \quad = \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta\ (t)\, \varphi\ (t)\, dt \quad = \quad \varphi\ (0)$$

$$f^*(t) \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} f(t)\ \delta\ (t - nT_e) \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} f(nT_e)\ \delta\ (t - nT_e)$$

<u>NB. Distribution :</u> pas de sens au sens des fonctions (intégrale de Riemann).

4.2 TL d'une fonction échantillonnée

- f(t) continue par morceaux pour t ≥ 0
- f(t) = 0 pour t < 0
- f(t) d'ordre exponentiel α_0,

c'est-à-dire : $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N / \forall n > N \quad \forall \alpha > \alpha_0 \quad |f(nT_e)| \; e^{-\alpha\, nT_e} < \varepsilon$

$$\phi^*(p) \quad = \quad \int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty f(t)\ \delta\ (t - nT_e)\, e^{-pt} dt \quad = \quad \sum_{n=0}^\infty f(nT_e) \underbrace{\int_0^\infty \delta\ (t - nT_e)\, e^{-pt} dt}_{e^{-nT_e p}}$$

$\Rightarrow \quad \phi^*(p) \quad = \quad \sum_{n=0}^\infty f(nT_e)\, e^{-nT_e p}$ pour $Re(p) > \alpha_0$ (abscisse de convergence).

Le changement de variable $z = e^{pT_e}$ transforme l'axe de convergence $Re(p) = \alpha_0$ en le cercle : $z = e^{(\alpha 0 + j\omega)T_e} \quad \Leftrightarrow \quad |z| \quad = \quad e^{\alpha 0 T_e}$

$$F(z) = \phi^*(p) \quad = \quad \sum_{n=0}^\infty \quad f(nT_e) \quad z^{-n} \quad = \quad Z[f(t)] = Z[f(nT_e)] \quad ; \quad |z| \quad > \quad e^{\alpha 0 T_e}$$

Souvent, on prend : $\boxed{T_e = 1}$

4.3 TZ des puissances de t

$TZ \quad [t^k] = \quad \sum_{n=0}^\infty n^k T_e^k z^{-n}$ converge pour $\quad |z| > 1 \quad$ (critère de d'<u>Alembert</u>)

$$= \quad T_e z \sum_{n=0}^\infty n^{k-1} \quad T_e^{k-1}\, n z^{-(n+1)}$$

$$TZ \quad \left[t^{k-1}\right] = \quad \sum_{n=0}^\infty n^{k-1}\, T_e^{k-1}\, z^{-n}$$

$$\frac{d}{dz} \quad TZ\left[t^{k-1}\right] = \quad -\sum n^{k-1}\, T_e^{k-1}\, n z^{-(n+1)} \Rightarrow \qquad TZ\left[t^k\right] \quad = \quad -T_e z\, \frac{d}{dz} Z\left[t^{k-1}\right]$$

pour $k = 0$: $\quad TZ[1] = \sum_{n=0}^\infty z^{-n} \quad = \quad \frac{z}{z-1}$ pour $|z| > 1$

Donc : $\quad TZ[t] \quad = \quad \frac{T_e z}{(z-1)^2}$

La TZ étant obtenue avec la TL et un changement de variable, c'est donc une transformation **linéaire**.

$$\boxed{\text{TZ [polynôme en } t \text{] = fonction rationnelle en } z}$$

4.4 TZ de $f(t)e^{-at}$

$$Z\ \left[e^{-at}\, f(t)\right] \quad = \quad \sum_{n=0}^\infty f(nT_e)\ e^{-anT_e}\, z^{-n} \quad = \quad \sum_{n=0}^\infty f(nT_e)\ \left(z e^{aT_e}\right)^{-n}$$

donc si $F(z) = Z\ [f(t)] \qquad$ alors $\quad Z\ \left[e^{-at}\, f(t)\right] \ = \ F\left(e^{aT_e} z\right)$

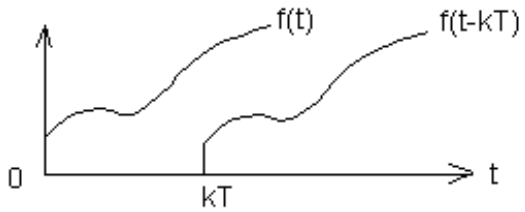
4.4.1 Théorème

Si $f(t)$ est une somme finie de termes du type t^k et $t^k e^{-at}$, dont la TL est d'abscisse de convergence α_0, alors la TZ est une fraction rationnelle en z, ayant tous ses pôles à l'intérieur du cercle de rayon $e^{\alpha_0 T_e}$.

4.5 Translation temporelle

4.5.1 Retard

$$Z\left[f\left(t\right)\right] \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} f\left(nT_e\right)\ z^{-n}$$



Fonction retardée : $g(t) = f(t - kT_e).H(t - kT_e)$ avec : $H(t - kT_e) = 0$ pour $t < kT_e$

$$Z\left[g(t)\right] = \sum_{n=0}^{\infty} g\ \left(nT_e\right)\ z^{-n} \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} f\ \left[(n-k)\ T_e\right] \quad \underbrace{H\left[(n-k)\ T_e\right]}_{=0\ \ si\ \ n<k}\ z^{-n}$$

$$= \sum_{n=k}^{\infty} f\left[(n-k)T_e\right]\ z^{-n} = \quad 0 + \cdots + 0 \ + \ f\left(0\right)\ z^{-k} \ + \ f\left(T_e\right)\ z^{-(k+1)} \ + \cdots$$

$$Z\left[f\left(t - kT_e\right)\ H\left(t - kT_e\right)\right] \quad = \quad z^{-k}\ Z\left[f\left(t\right)\right]$$

donc : $\boxed{z^{-1} = \text{opérateur retard}}$

4.5.2 Avance

$$Z\left[f(t + kT_e)\right] = \sum_{n=0}^{\infty} f\left[(n+k)\,T_e\right] z^{-n} = z^k \sum_{n=0}^{\infty} f\left[(n+k)\,T_e\right] z^{-(n+k)} = z^k \sum_{m=k}^{\infty} f\left(mT_e\right) z^{-m}$$

$$Z\left[f(t + kT_e)\right] \quad = \quad z^k \left[F\left(z\right) \ - \ \sum_{m=0}^{k-1} f\left(mT_e\right) \ \ z^{-m}\right]$$

4.6 Théorème de la valeur initiale

$$F\left(z\right) \quad = \quad Z\left[f\left(t\right)\right] \quad = \quad f\left(0\right) + \sum_{n=1}^{\infty} f\left(nT_e\right) z^{-n} \quad ;\ |z| > e^{\sigma T_e}$$

La série converge uniformément pour $|z| \geq R' > e^{\sigma T_e}$ donc la limite de la série quand $|z| \to \infty$ est obtenue en prenant la limite de chaque élément terme à terme :

$$\boxed{\lim_{z\to\infty} \ F\left(z\right) \quad = \quad f\left(0\right)}$$

4.7 Théorème de la valeur finale

$$f\left(\infty\right) \quad = \quad \lim_{z\to 1} \quad \left(z-1\right) F\left(z\right) \quad = \quad \lim_{z\to 1} \quad \left(1 - z^{-1}\right) F\left(z\right)$$

4.7.1 Preuve

$$\begin{aligned} z\,F(z) - F(z) &= [zf(0) + Z[f(t+T_e)]] - Z[f(t)] \\ \Rightarrow \quad Z[f(t+T_e) - f(t)] &= (z-1)\,F(z) - zf(0) \\ \Leftrightarrow \quad \sum_{n=o}^{\infty} [f[(n+1)T_e] - f(nT_e)]\,z^{-n} &= (z-1)\,F(z) - zf(0) \end{aligned}$$

$$f(T_e) - f(0)$$
$$f(2T_e) - f(T_e)$$
$$\ldots$$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(nT_e)\,z^{-n} - f(0) = (z-1)\,F(z) - zf(0)$$

Si on fait tendre z vers 1, on a : $\boxed{\lim_{z\to 1} (z-1)\,F(z) = f(\infty)}$

4.8 Formule d'inversion

Posons : $z = Re^{j\theta}$ dans l'équation $F(z) = \sum_{n=o}^{\infty} f(nT_e)\,z^{-n}$:

$$F\left(Re^{j\theta}\right) = \sum_{n=o}^{\infty} f(nT_e)\,\frac{1}{R^n} e^{-jn\theta} \quad R > e^{\sigma T_e}$$

On peut décomposer partie réelle et imaginaire :
$f_1(\theta) = Re\left[F\left(Re^{j\theta}\right)\right]$ et $f_2(\theta) = Im\left[F\left(Re^{j\theta}\right)\right]$

$$f_1(\theta) + j\ f_2(\theta) = \sum_{n=o}^{\infty} f(nT_e)\,\frac{1}{R^n}\cos\ n\theta - j\sum_{n=1}^{\infty} f(nT_e)\,\frac{1}{R^n}\sin\ n\theta$$

Utilisons les formules des coefficients des séries de Fourier :

$$f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_1(\theta)\,d\theta$$

$$f(nT_e) = \frac{R^n}{\pi}\int_0^{2\pi} f_1(\theta)\cos\ n\theta\,d\theta$$

$$f(nT_e) = -\frac{R^n}{\pi}\int_0^{2\pi} f_2(\theta)\sin\ n\theta\,d\theta$$

Additionnons les deux dernières équations et divisons par 2 :

$$f(nT_e) = \frac{R^n}{2\pi}\int_0^{2\pi} [f_1(\theta)\cos\ n\theta - f_2(\theta)\sin\ n\theta]\ d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Re\left[F\left(Re^{j\theta}\right)R^n e^{jn\theta}\right]\,d\theta$$

car : $F\left(Re^{j\theta}\right) = f_1(\theta) + j\ f_2(\theta)$ et : $R^n e^{jn\theta} = R^n(\cos\ n\theta + j\ \sin\ n\theta)$
$F(z)$ est une fonction réelle de z donc :
- $Re[F]$ est fonction paire de θ
- $Im[F]$ est fonction impaire de θ

Donc :

$$Im\left[F\left(Re^{j\theta}\right)R^n e^{jn\theta}\right] = Re\left[F\left(Re^{j\theta}\right)\right] Im\left(R^n e^{jn\theta}\right) - Im\left[F\left(Re^{j\theta}\right)\right] Re\left(R^n e^{jn\theta}\right)$$

est une fonction impaire de θ, ce qui entraîne que : $\int_0^{2\pi} Im\left[F\left(Re^{j\theta}\right)R^n e^{jn\theta}\right]\,d\theta = 0$
On peut donc réécrire : $f(nT_e) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F\left(Re^{j\theta}\right)R^n e^{jn\theta}\,d\theta$

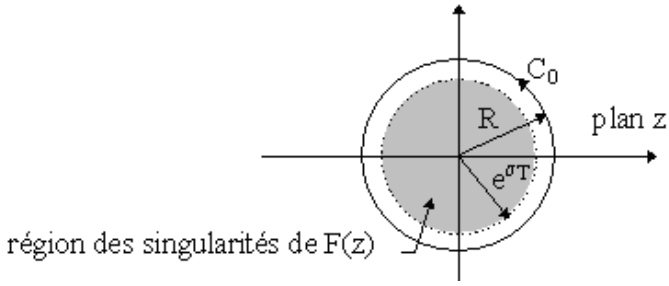


FIGURE 4.2 – Contour d'intégration utilisé pour la TZ inverse.

Considérons un contour d'intégration C_0 circulaire dans le sens direct de rayon $R > e^{\sigma T_e}$ (Fig. 4.2) :

On fait donc une intégration sur ce contour : $Re^{j\theta} = z$ et $d\theta = \frac{1}{jz}dz$

d'où : $\begin{cases} f(nT_e) & = & \frac{1}{j2\pi} \oint\limits_{Co} z^{n-1} F(z)\, dz \\ f(nT_e) & = & \sum\limits_k \text{Résidu } \left[z^{n-1}F(z)\,; z = p_k\right] \end{cases}$ où p_k = pôles de $F(z)$

que l'on peut écrire : $f(nT_e) \quad = \quad Z^{-1}[F(z)]$.

On voit donc que cette formule ne donne $f(t)$ que pour les valeurs entières de n.

Elle ne donne pas une détermination unique de $f(t), \forall t \in R$.

4.9 Propriété périodique de $\phi^*(p)$ et relation avec $\phi(p)$

$$z = e^{pT_e} \qquad \phi^*(p) = F(z)$$

comme : $e^{pT_e} = e^{\left(p + j\frac{2\pi\, n}{T_e}\right)T_e}$ on en déduit que $F(z)$ est une fonction périodique :

$$\phi^*(p) \quad = \quad \phi^*\left(p + \frac{j2\pi n}{T_e}\right)$$

On a : $f^*(t) \quad = \quad f(t) \;\; p(t)$

Or on montre que (formule de Poisson) : $p(t) \quad = \quad \frac{1}{T_e}\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{2i\pi nt}{T_e}}$

Donc : $f^*(t) \quad = \quad \frac{1}{T_e}\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{\frac{2i\pi nt}{T_e}}$

D'où : $\phi^*(p) \quad = \quad \frac{1}{T_e}\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} TL\left[f(t)\, e^{\frac{2i\pi\, nt}{T_e}}\right]$

Or : $f(t)\, e^{-at} \;\supset\; \phi(p+a)$

Donc : $TL\left[f(t)\; e^{\frac{2i\pi\, nt}{T_e}}\right] \quad = \quad \phi\left(p - \frac{2i\pi\, n}{T_e}\right)$

Conclusion : $\quad \phi^*(p) \quad = \quad \frac{1}{T_e}\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} \phi\left(p + \frac{2i\pi\, n}{T_e}\right)$

4.10 Expression de $\phi^*(p)$ à l'aide des résidus

$$\phi^*(p) = F(z) \quad = \quad \sum_{\substack{pi \\ \text{pôles de } F(\nu)}} \text{Résidus } \left[\frac{F(\nu)}{1 - e^{\nu T_e} z^{-1}}\right]_{\nu\, =\, pi}$$

Si $F(\nu) = \frac{N(\nu)}{D(\nu)}$, le résidu correspondant à un pôle simple vaut :

$$r_i \quad = \quad \frac{N(p_i)}{\frac{d}{d\nu}\; [D(\nu) \;\; (1 - e^{\nu \mathrm{T_e}}\, z^{-1})]_{\nu = p_i}} \quad = \quad \frac{N(p_i)}{D'(p_i)\; (1 - e^{p_i T_e}\, z^{-1})}$$

Donc si $F(\nu)$ n'a que des pôles simples :

$$F(z) \quad = \quad \sum_{p_i} \frac{N(p_i)}{D'(p_i)} \; \frac{1}{1 - e^{p_i \mathrm{T_e}} \; z^{-1}}$$

Pour des pôles multiples : pôle d'ordre n

$$r_i \quad = \quad \frac{1}{(n-1)\,!} \; \left[\frac{d^{n-1}}{d\nu^{n-1}} \; \left((\nu - p_i)^n \;\; F(\nu) \; \frac{1}{1 - e^{T_e \nu} \; z^{-1}} \right) \right]_{\nu = p_i}$$

4.10.1 Rappel sur les résidus

- cas d'un pôle simple z_0 :
  $Res \; [F(z) \; en \; z \; = \; z_0] \;\; = \;\; \lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0) \; F(z) \;\; = \;\; \frac{N(z_0)}{D'(z_0)}$ si $F(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$
- cas d'un pôle multiple z_0 d'ordre n :

$$Res \; [F(z) \; en \; z \; = \; z_0] \;\; = \;\; \frac{1}{(n-1)\,!} \; \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \; \left[(z - z_0)^n \;\; F(z) \right]_{z \, = \, z_0}$$

4.11 Dérivation et intégration par rapport à un paramètre

$$Z \; \left[\tfrac{\partial}{\partial \, a} \;\; f(nT_e, \; a) \right] \quad = \quad \tfrac{\partial}{\partial \, a} \;\; F(z, \; a)$$

$$Z \; \left[\int_{a_0}^{a_1} \;\; f(nT_e, \; a) \; da \right] \quad = \quad \int_{a_0}^{a_1} \;\; F(z, \; a) \; da$$

Nous avons en effet : $F(z, \; a) \quad = \quad \sum\limits_{n=0}^{\infty} \; f(nT_e, \; a) \; z^{-n}$

Donc : $\frac{\partial \, F(z, \, a)}{\partial \, a} \quad = \quad \sum\limits_{n=0}^{\infty} \; \frac{\partial \, f(nT_e, \, a)}{\partial \, a} \; z^{-n} \quad = \quad Z \; \left[\frac{\partial}{\partial \, a} \; f(nT_e, \; a) \right]$

Exemple : calculer $Z \; \left[\frac{1}{(p+a)^2} \right] \quad = \quad \frac{T_e e^{-aT_e} \; z}{(z - e^{-aT_e})^2}$

sachant que : $Z \; \left[\frac{1}{p+a} \right] \quad = \quad \frac{z}{z - e^{-aT_e}}$

4.12 Théorème de Parseval

$$\sum_{n=0}^{\infty} \; \left[f(nT_e)^2 \right] \quad = \quad \frac{1}{2\pi \, j} \; \oint_c \; z^{-1} \; F(z) \; F\left(z^{-1}\right) \; d \, z$$

Preuve : on utilise la formule d'inversion.

4.13 Théorème de convolution discrète

$$F_1(z) \quad = \quad Z \; [f_1(t)] \quad = \quad \sum_{0}^{\infty} \; f_1(nT_e) \; z^{-n}$$

$$F_2(z) \quad = \quad Z \; [f_2(t)] \quad = \quad \sum_{0}^{\infty} \; f_2(nT_e) \; z^{-n}$$

$F_1(z) \; F_2(z) \quad = \quad \sum\limits_{n=0}^{\infty} \; \sum\limits_{k=0}^{\infty} \; f_1(nT_e) \; f_2(kT_e) \; z^{-(n+k)}$

Posons $m = n + k$

$$F_1(z) \; F_2(z) \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} \; \sum_{m=n}^{\infty} \; f_1(n\mathrm{T_e}) \; f_2 \; [(m-n) \; T_e] \; z^{-m}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f_1(nT_e)\ f_2\ [(m-n)\ T_e]\ z^{-m}$$

car : $f_2[(m-n)T_e] = 0$ pour $m < n$.

Posons : $C(mT_e) = \sum_{n=0}^{\infty} f_1(nT_e)\ f_2((m-n)T_e)$ et $t = mT_e$

$C(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_1(n\mathrm{T_e})\ f_2(t - nT_e)$ produit de convolution discrète

On a : $F_1(z)\ F_2(z) = \sum_{m=0}^{\infty} C(mT_e)\ z^{-m} = Z\ [C(t)]$

D'où : $F_1(z)\ F_2(z) = Z\left[\sum_{n=0}^{\infty} f_1(nT_e)\ f_2(t - nT_e)\right]$

C'est-à-dire :

$$\boxed{F_1(z) \cdot F_2(z) = Z\ [f_1(t) * f_2(t)]}$$

NB : En fait, la sommation n'est pas infinie mais s'arrête à $nT_e = t$ (causalité de f_2). [5, 6, 7, 2, 8, 9, 10, 11]

4.14 Vademecum sur la Transformée en Z

On pose : $\boxed{z = e^{pT_e}}$

Définition :

$$\boxed{Z\left[f(t)\right] = F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT_e)z^{-n} \quad |z| > e^{\sigma T_e}}$$

TRANSFORMEE EN Z DES PUISSANCES DE t :

$$Z\left[t^k\right] = -T_e z \frac{d}{dz} Z\left[t^{k-1}\right] \quad ; \quad Z\left[1\right] = \frac{z}{z-1} \quad , \quad |z| > 1 \quad ; \quad Z\left[t\right] = \frac{T_e z}{(z-1)^2}$$

TRANSFORMEE EN Z DE $f(t)e^{-at}$:

$$Z\left[e^{-at}f(t)\right] = F\left(e^{aT_e}z\right) \qquad Z\left[e^{-at}\right] = \frac{z}{z - e^{-aT_e}}$$

RETARD TEMPOREL :

$$\boxed{Z\left[f(t - kT_e)\right] = z^{-k} Z\left[f(t)\right]}$$

AVANCE TEMPORELLE :

$$Z\left[f(t + kT_e)\right] = z^k \left[F(z) - \sum_{m=0}^{k-1} f(mT_e)z^{-m}\right]$$

THEOREME DE LA VALEUR INITIALE :

$$\lim_{z\to\infty} F(z) \quad = \quad f(0)$$

THEOREME DE LA VALEUR FINALE :

$$f(\infty) = \lim_{z\to 1} (z-1)\, F(z) \quad = \quad \lim_{z\to 1} \left(1 - z^{-1}\right) F(z)$$

THEOREME DE CONVOLUTION DISCRETE :

$$\left\{\begin{array}{lllll} F_1(z) & = & Z\ [f_1(t)] & = & \sum\limits_{0}^{\infty} f_1(nT_e)\ z^{-n} \\ F_2(z) & = & Z\ [f_2(t)] & = & \sum\limits_{0}^{\infty} f_2(nT_e)\ z^{-n} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\boxed{F_1(z)\ \cdot\ F_2(z) \quad = \quad Z\ \ [f_1(t)\ *\ f_2(t)] \quad = \quad Z\left[\sum_{n=0}^{t/T_e} f_1(n\mathrm{T_e})\ \ f_2(t - nT_e)\right]}$$

DERIVATION ET INTEGRATION PAR RAPPORT A UN PARAMETRE :

$$Z\left[\frac{\partial}{\partial a} f(nT_e, a)\right] = \frac{\partial}{\partial a} F(z, a) \quad ; \quad Z\left[\int_{a_0}^{a_1} f(nT_e, a)\, da\right] = \int_{a_0}^{a_1} F(z, a)\, da$$

THEOREME DE PARSEVAL :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[f(nT_e)\right]^2 = \frac{1}{2i\pi} \oint_{Co} z^{-1} F(z)\ F(z^{-1}) dz$$

FORMULE D'INVERSION :

$$f(nT_e) \quad = \quad \frac{1}{j2\pi} \oint_{C_0} z^{n-1} F(z)\ dz \quad = \quad \sum_i \text{Résidu}\left[z^{n-1}F(z)\,; z = p_i\right]$$

Chapitre 5

RECAPITULATIF SUR LES TRANSFORMEES

5.1 Rappel sur les distributions

Définition

On appelle distribution T, une fonctionnelle sur D où D est l'EV des fonctions $\varphi(t)$ à valeurs complexes définies sur R, <u>indéfiniment dérivables</u> et à <u>support borné</u>.

$$T \quad : \quad \overset{D}{\varphi} \quad \rightarrow \quad \overset{C}{<} T, \varphi >$$

<u>Exemple :</u> $< T_F, \varphi > \quad = \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F\,(t)\ \varphi\ (t)\, dt$

$$< \delta, \varphi > \quad = \quad < T_\delta, \varphi > \quad = \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta\ (t)\, \varphi\ (t)\, dt \quad = \quad \varphi\ (0)$$

$$f^*\,(t) \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} f\,(t)\ \delta\ (t - nT) \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} f\,(nT)\ \delta\ (t - nT)$$

<u>NB. Distribution :</u> pas de sens au sens des fonctions (intégrale de Riemann).

Distribution de Dirac

Définie par une limite : $\boxed{\delta(x) = \lim\limits_{\epsilon \to 0} I_\epsilon(x)}$ où $I_\epsilon(x)$ est une impulsion infiniement courte (durée ϵ) et infiniement haute (amplitude $1/\epsilon$) :

On en déduit :

- la parité : $\delta(x) = \delta(-x)$ et $\delta(x - a) = \delta(a - x)$
- l'intégrale : $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1$

Produit simple :

- distribution pondérée par la valeur de la fonction : $\boxed{\delta(x - a) f(x) = \delta(x - a) f(a)}$
- cas particulier où $a = 0$: $\delta(x) f(x) = \delta(x) f(0)$

Elément neutre de la convolution (preuve par la TL : $H(p) = 1$) :

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - u) f(u) du = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(u) f(x - u) du = \delta(x) * f(x) = f(x)$$

De même : $\boxed{\delta(x - a) * f(x) = f(x - a)}$

On en déduit les **intégrales** :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0)$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-a) f(x) dx = f(a)}$$

Dérivée : $f'(x) = f(x) * \delta'(x)$

Dérivée nième : $\boxed{f(x) * \delta^{(n)}(x) = f^{(n)}(x)}$

5.2 Développement en Série de Fourier

Soit une fonction $f(t)$:
- périodique de période T
- définie dans un intervalle $[\theta, \theta + T]$,
- satisfaisant les conditions de Dirichlet (discontinuités de 1ère espèce).

Alors :

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{2\pi kt}{T} + b_k \sin \frac{2\pi kt}{T}$$

avec :

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{\theta}^{\theta+T} f(t)\, dt$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{\theta}^{\theta+T} f(t)\, \cos \frac{2\pi kt}{T} dt$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{\theta}^{\theta+T} f(t)\, \sin \frac{2\pi kt}{T} dt$$

On peut poser : $\left\{ \begin{array}{lcl} a_k & = & A_k \cos \varphi_k \\ b_k & = & A_k \sin \varphi_k \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} A_k & = & \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \\ \varphi_k & = & Arctg\, \frac{b_k}{a_k} \end{array} \right.$

$$\Rightarrow \quad f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos \left(\frac{2\pi\, kt}{T} - \varphi_k \right)$$

Terminologie

- a_0 représente la **composante continue**
- A_1 représente l'amplitude du **fondamental**
- A_k représente l'amplitude de l'**harmonique** de rang k
- φ_k représente le **déphasage**
- $\nu = 1/T$ représente la **fréquence** fondamentale
- $\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T$ représente la **pulsation** de base.

Formule de Bessel-Parseval

On a conservation de l'énergie :

$$\frac{1}{T} \int_{\theta}^{\theta+T} [f(t)]^2\, dt = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\left(a_k^2 + b_k^2\right)}_{A_k^2}$$

Définition de la valeur efficace

$V_{eff} = \left[\frac{1}{T} \int_{\theta}^{\theta+T} [f(t)]^2\, dt \right]^{1/2}$ C'est-à-dire : $V_{eff}^2 = \underset{\uparrow \text{ valeur moyenne}}{<} [f(t)]^2 >$

DSF Exponentiel

$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \exp\left(\frac{j2\pi kt}{T}\right)$ avec $c_k = F(k) = \frac{1}{T} \int_{\theta}^{\theta+T} f(t) \exp\left(-\frac{j2\pi kt}{T}\right) dt$

Pour un signal réel, on a $c_k^* = c_k$ d'où :

$$a_0 = c_0 \tag{5.1}$$

$$a_k = 2\Re[c_k] \tag{5.2}$$

$$b_k = -2\Im[c_k] \tag{5.3}$$

5.3 Tableau récapitulatif de la TL

Domaine du **temps** $t \in \mathcal{R}$ où $t > 0$	$\overset{TL}{\longrightarrow}$ $\overset{TL^{-1}}{\longleftarrow}$	Domaine de **fréquence généralisée** $p \in \mathcal{C}$ avec $Re(p) = \sigma > \sigma_o$
$f(t)$	$\supset$	$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt \quad \subset f(t)$
df/dt	$\supset$	$pF(p) - f(0^+)$
$f(t) * g(t)$	$\supset$	$F(p).G(p)$
$f(0^+)$	$=$	$\lim_{p\to\infty} pF(p)$
$f(\infty)$	$=$	$\lim_{p\to 0} pF(p)$
$f(t-t_0)$	$\supset$	$e^{-pt_0}F(p)$
$e^{-at}f(t)$	$\supset$	$F(p+a)$
$a.f(at)$	$\supset$	$F(p/a)$
$f^{(n)}(t)$	$\supset$	$p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - ... - f^{(n-1)}(0)$
$(-1)^n t^n f(t)$	$\supset$	$F^{(n)}(p)$
$\delta(t)$	$\supset$	1
$\delta^{(n)}(t)$	$\supset$	p^n
$H(t) = 1_{t>0}$	$\supset$	$1/p$
t	$\supset$	$1/p^2$
$t^n/n!$	$\supset$	$1/p^{n+1}$
e^{-at}	$\supset$	$1/(p+a)$
$\sin\omega t$	$\supset$	$\omega/(p^2+\omega^2)$
$\cos\omega t$	$\supset$	$p/(p^2+\omega^2)$
$\sinh at$	$\supset$	$\frac{a}{p^2-a^2}$
$\cosh at$	$\supset$	$\frac{p}{p^2-a^2}$
$e^{-at}t^n/n!$	$\supset$	$1/(p+a)^{n+1}$
$e^{-at}\sin\omega t$	$\supset$	$\frac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$
$e^{-at}\cos\omega t$	$\supset$	$\frac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}$
$e^{bt}\sinh at$	$\supset$	$\frac{a}{(p-b)^2-a^2}$
$e^{bt}\cosh at$	$\supset$	$\frac{p-b}{(p-b)^2-a^2}$
$\frac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}$	$\supset$	$\frac{1}{(p-a)(p-b)}$
$\frac{ae^{at}-be^{bt}}{a-b}$	$\supset$	$\frac{p}{(p-a)(p-b)}$
$[(b-a)t+1]e^{-at}$	$\supset$	$\frac{p+b}{(p+a)^2}$
$t\sin\omega t$	$\supset$	$\frac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2}$
$t\cos\omega t$	$\supset$	$\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$
$\frac{\sin(\omega t)-\omega t\cos\omega t}{2\omega^3}$	$\supset$	$\frac{1}{(p^2+\omega^2)^2}$

5.4 Tableau récapitulatif de la TF

Domaine du **temps continu** $t \in \mathcal{R}$	$\overset{TF}{\longrightarrow}$ $\overset{TF^{-1}}{\longleftarrow}$	Domaine des **fréquences** $\nu \in \mathcal{R}$ ($\omega = 2\pi\nu$)
$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu)e^{+j2\pi\nu t}d\nu$		$F(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j2\pi\nu t}dt$
$f(-t)$		$F(-\nu)$
$f(t/a)$		$\lvert a\rvert F(a\nu)$
$f(t) * g(t)$		$F(\nu).G(\nu)$
$f(t).g(t)$		$F(\nu) * G(\nu)$
$f(t-t_0)$		$e^{-j2\pi t_0\nu}F(\nu)$
$e^{j2\pi\nu_0 t}f(t)$		$F(\nu-\nu_0)$
$f^{(n)}(t)$		$(j2\pi\nu)^n F(\nu)$
$(-j2\pi t)^n f(t)$		$F^{(n)}(\nu)$
$\overline{f(t)}$		$\overline{F(-\nu)}$
$\delta(t)$		1
1		$\delta(\nu)$
$\delta(t-t_0)$		$e^{-j2\pi t_0\nu}$
$e^{j2\pi\nu_0 t}$		$\delta(\nu-\nu_0)$
$\delta^{(n)}(t)$		$(j2\pi\nu)^n$
$(j2\pi t)^n$		$(-1)^n\delta^{(n)}(\nu)$
$\sqcap_T(t)$		$T\mathrm{sinc}(\pi\nu T)$
$\sin(\pi t)/(\pi t)$		$\sqcap_1(\nu)$
$\bigwedge_T(t)$		$(T/2)\mathrm{sinc}^2(\pi\nu T/2)$
$H(t)$		$\frac{\delta(\nu)}{2} - \frac{j}{2\pi\nu}$
$\mathrm{sign}(t)$		$-\frac{j}{\pi\nu}$
$\cos 2\pi\nu_0 t$		$\frac{1}{2}[\delta(\nu+\nu_0)+\delta(\nu-\nu_0)]$
$\sin 2\pi\nu_0 t$		$\frac{j}{2}[\delta(\nu+\nu_0)-\delta(\nu-\nu_0)]$
$\exp(-\pi t^2)$		$\exp(-\pi\nu^2)$
$e^{-t}H(t)$		$1/(1+j2\pi\nu)$
$e^{-\lvert t\rvert}$		$2/(1+4\pi^2\nu^2)$
$te^{-\pi t^2}$		$-i\nu e^{-\pi\nu^2}$
$\sum_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT_0)$	$F_0 = \frac{1}{T_0}$	$F_0\sum_{-\infty}^{+\infty}\delta(\nu-nF_0)$
$\sum_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-n)$	$T_0 = 1$	$\sum_{-\infty}^{+\infty}\delta(\nu-n)$
$\sum_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-n) = \sum_{-\infty}^{+\infty}e^{-j2\pi nt}$	Formule de Poisson	$\sum_{-\infty}^{+\infty}\delta(\nu-n) = \sum_{-\infty}^{+\infty}e^{-j2\pi n\nu}$

5.5 Tableau récapitulatif de la TZ

Domaine du **temps échantillonné** $t = nT_e \Rightarrow f(t) = f(nT_e) = f(n)$	$\overset{TZ}{\longrightarrow}$ $\overset{TZ^{-1}}{\longleftarrow}$	Domaine des **fréquences** $F(z)$ $z = e^{pT_e} \in \mathcal{C}$
$f(nT_e) = \frac{1}{j2\pi} \oint_{C_0} \frac{F(z)}{z} z^n dz$	$\leftrightarrow$	$F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(n) z^{-n}$
$f(t - kT_e) = f(n-k)$	$\leftrightarrow$	$z^{-k} F(z)$
$f(t + kT_e) = f(n+k)$	$\leftrightarrow$	$z^k F(z) - \sum_{n=0}^{k-1} z^{k-n} f(nT_e)$
$f_1(t) * f_2(t) = \sum_{k=0}^{t/T_e=n} f_1(kT_e) f_2(t - kT_e)$	$\leftrightarrow$	$F_1(z).F_2(z)$
$f(0)$	$=$	$\lim_{z\to\infty} F(z)$
$f(\infty)$	$=$	$\lim_{z\to 1}(z-1)F(z) = \lim_{z\to 1}(1 - z^{-1})F(z)$
$f(t)e^{-at}$	$\leftrightarrow$	$F(ze^{aT_e})$
$f(t)a^t$	$\leftrightarrow$	$F(\frac{z}{a^{T_e}})$
$tf(t)$	$\leftrightarrow$	$-T_e z F'(z)$
$\delta(t)$	$\leftrightarrow$	1
$\delta(t - kT_e)$	$\leftrightarrow$	z^{-k}
$H(t)$	$\leftrightarrow$	$z/(z-1)$
e^{-at}	$\leftrightarrow$	$z/(z - e^{-aT_e})$
a^t	$\leftrightarrow$	$z/(z - a^{T_e})$
t	$\leftrightarrow$	$T_e z/(z-1)^2$
t^2	$\leftrightarrow$	$T_e^2 z(z+1)/(z-1)^3$
te^{-at}	$\leftrightarrow$	$T_e z e^{-aT_e}/(z - e^{-aT_e})^2$
$e^{-at}t^2/2$	$\leftrightarrow$	$\frac{zT_e^2 e^{-aTe}}{2(z-e^{-aTe})^2} + \frac{zT_e^2 e^{-2aTe}}{(z-e^{-aTe})^3}$
$\sin \omega t$	$\leftrightarrow$	$z \sin \omega T_e/(z^2 - 2z\cos\omega T_e + 1)$
$\cos \omega t$	$\leftrightarrow$	$z(z - \cos\omega T_e)/(z^2 - 2z\cos\omega T_e + 1)$
$e^{-at}\sin\omega t$	$\leftrightarrow$	$ze^{-aT_e}\sin\omega T_e/(z^2 - 2ze^{-aT_e}\cos\omega T_e + e^{-2aT_e})$
$e^{-at}\cos\omega t$	$\leftrightarrow$	$z(z - e^{-aT_e}\cos\omega T_e)/(z^2 - 2ze^{-aT_e}\cos\omega T_e + e^{-2aT_e})$
$\sinh \omega t$	$\leftrightarrow$	$z\sinh\omega T_e/(z^2 - 2z\cosh\omega T_e + 1)$
$\cosh \omega t$	$\leftrightarrow$	$z(z - \cosh\omega T_e)/(z^2 - 2z\cosh\omega T_e + 1)$

5.6 Tableau synthétique des transformées

Transformée	Liens	Directe	Inverse
TF énergie finie	$\omega = 2\pi\nu$	$F(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\,2\pi\,\nu\,t}dt$	$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu)e^{+j\,2\pi\,\nu\,t}d\nu$
TFDT échantillonné	$t = nT_e$ $F_e = 1/T_e$	$X(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n \exp(-j2\pi\nu nT_e)$	$x_n = \int_{-F_e/2}^{F_e/2} X(\nu)\exp(j2\pi\nu nT_e)d\nu$
TFDT fréq. réduite	$u = \frac{\nu}{F_e}$ $(F_e = 1)$	$X(u) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n \exp(-j2\pi nu)$	$x_n = \int_{-1/2}^{1/2} X(u)\exp(j2\pi nu)du$
TFD (FFT) durée tronquée	$\nu = \frac{kF_e}{N}$ $T = NT_e$	$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \exp(-j\frac{2\pi nk}{N})$	$x_n = \sum_{n=0}^{N-1} X_k \exp(+j\frac{2\pi nk}{N})$
DSF périodique	$\nu_k = \frac{k}{T_0}$ période T_0	$C_k = \frac{1}{T_0}\int_{[T_0]} f(t)\exp\left(-j\frac{2\pi kt}{T_0}\right)dt$	$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k \exp\left(j\frac{2\pi kt}{T_0}\right)$
TL analogique causal	$p = j\omega$ $C = 0$	$\Phi(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt$	$f(t) = \frac{1}{j2\pi}\int_{C-j\infty}^{C+j\infty} \Phi(p)e^{pt}dp$
TZ numérique	$z = e^{pT_e}$ $t = nT_e$ C_0 cercle U	$F(z) = \sum_{n=o}^{\infty} f(nT_e)z^{-n}$	$f(nT_e) = \frac{1}{j2\pi}\oint_{C_0} z^{n-1}F(z)dz$ $= \sum_i \text{Résidu}\left[z^{n-1}F(z)\,;z = p_i\right]$

Chapitre 6

RAPPEL DE PREREQUIS

6.1 Trigonométrie

RELATION FONDAMENTALE : $\boxed{\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1}$

PARITE :

$$\boxed{\begin{array}{l} \sin(-\theta) = -\sin(\theta) \\ \cos(-\theta) = \cos(\theta) \end{array}}$$

SYMETRIE :

$$\boxed{\begin{array}{l} \sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = \cos\theta \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = \sin\theta \\ \tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cot\theta \\ \cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \tan\theta \\ \cos(\pi-\theta) = \cos(\pi+\theta) = -\cos\theta \\ \sin(\pi-\theta) = -\sin(\pi+\theta) = \sin\theta \end{array}}$$

ADDITION :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \left.\begin{array}{l} \sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b \\ \sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b \end{array}\right\} \Rightarrow & \left\{\begin{array}{l} \tan a + \tan b = \frac{\sin(a+b)}{\cos a\cos b} \\ \tan a - \tan b = \frac{\sin(a-b)}{\cos a\cos b} \end{array}\right. \\ \cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b & \\ \cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b & \\ \tan(a+b) = \frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b} & \tan(a-b) = \frac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\tan b} \\ \cot(a+b) = \frac{\cot a\cot b-1}{\cot a+\cot b} & \cot(a-b) = \frac{1+\cot a\cot b}{\cot b-\cot a} \end{array}}$$

ANGLE DOUBLE :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \sin 2a = 2\sin a\cos a & \\ \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a & \\ \Rightarrow \quad \cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2} & \sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2} \\ \tan 2a = \frac{2\tan a}{1-\tan^2 a} & \end{array}}$$

SOMME-DIFFERENCE-PRODUIT :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \sin a + \sin b = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) & \sin a\sin b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right] \\ \sin a - \sin b = 2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right) & \sin a\cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right] \\ \cos a + \cos b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) & \cos a\cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) + \cos(a+b)\right] \\ \cos a - \cos b = -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right) & \cos a\sin b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) - \sin(a-b)\right] \\ \sin(a+b)\sin(a-b) = \cos^2 b - \cos^2 a & \tan a\tan b = \frac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{\cos(a-b)+\cos(a+b)} \\ \cos(a+b)\cos(a-b) = \cos^2 b - \sin^2 a & \frac{\tan a}{\tan b} = \frac{\sin(a+b)+\sin(a-b)}{\sin(a+b)-\sin(a-b)} \end{array}}$$

AUTRES RELATIONS :

$$\boxed{\frac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \tan^2\theta \qquad \frac{1}{\sin^2\theta} = 1 + \cot^2\theta}$$

soit : $t = \tan\frac{a}{2}$ $\boxed{\cos a = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \sin a = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \tan a = \frac{2t}{1-t^2} \qquad \cot a = \frac{1-t^2}{2t}}$

ANGLES REMARQUABLES :

	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
sin	**0**	$\mathbf{1/2}$	$\mathbf{\sqrt{2}/2}$	$\mathbf{\sqrt{3}/2}$	**1**
cos	**1**	$\mathbf{\sqrt{3}/2}$	$\mathbf{\sqrt{2}/2}$	$\mathbf{1/2}$	**0**
tan	**0**	$\mathbf{1/\sqrt{3}}$	**1**	$\mathbf{\sqrt{3}}$	$+\infty$
cot	∞	$\mathbf{\sqrt{3}}$	**1**	$\mathbf{1/\sqrt{3}}$	**0**

RELATIONS ENTRE FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES :

	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\cot x$
$\sin x$	$\sin x$	$\pm\sqrt{1-\cos^2 x}$	$\frac{\pm\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2 x}}$
$\cos x$	$\pm\sqrt{1-\sin^2 x}$	$\cos x$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$	$\pm\frac{\cot x}{\sqrt{1+\cot^2 x}}$
$\tan x$	$\frac{\sin x}{\pm\sqrt{1-\sin^2 x}}$	$\frac{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$	$\tan x$	$\frac{1}{\cot x}$
$\cot x$	$\frac{\pm\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sin x}$	$\frac{\cos x}{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}$	$\frac{1}{\tan x}$	$\cot x$

$$\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$

DERIVEES :

fonction	sin x	cos x	tg x	cot x	Arcsin x	Arccos x	Arctg x
dérivée	$\cos x$	$-\sin x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x$	$\frac{-1}{\sin^2 x} = -1-\cot^2 x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{1+x^2}$

LIMITES ET INTEGRALES USUELLES :

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1} \text{ et } \boxed{\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2}}$$

FORMULES D'EULER :

$$\boxed{\cos\theta = \frac{\exp(i\theta)+\exp(-i\theta)}{2}} \text{ et } \boxed{\sin\theta = \frac{\exp(i\theta)-\exp(-i\theta)}{2i}}$$

6.2 Développements limités usuels au voisinage de zéro

$\boxed{\lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0}$

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+x^n\varepsilon(x)$$

$$a^x = 1+\frac{x\ln a}{1!}+\frac{(x\ln a)^2}{2!}+\cdots+\frac{(x\ln a)^n}{n!}+x^n\varepsilon(x)\ \text{ car } a^x=\exp(x\ln a)$$

$$(1+x)^r = 1+\frac{rx}{1!}+\frac{r(r-1)x^2}{2!}+\cdots+\frac{r(r-1)\cdots(r-p+1)x^p}{p!}+\cdots+\frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)x^n}{n!}$$
$$+x^n\varepsilon(x)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1-x+x^2-x^3+x^4-x^5\cdots+(-1)^n x^n+x^n\varepsilon(x)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+x^4+x^5\cdots+x^n+x^n\varepsilon(x)$$

$$\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+x^n\varepsilon(x)$$

$$\ln(1-x) = -x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\cdots-\frac{x^n}{n}+x^n\varepsilon(x)$$

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+x^{2n+2}\varepsilon(x)$$

$$\sinh x = x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+x^{2n+2}\varepsilon(x)$$

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+x^{2n+1}\varepsilon(x)$$

$$\cosh x = 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+x^{2n+1}\varepsilon(x)$$

$$\tan x = x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}+x^8\varepsilon(x)$$

$$\tanh x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}-\frac{17x^7}{315}+x^8\varepsilon(x)$$

$$\cot x = \frac{1}{x}-\frac{x}{3}-\frac{x^3}{45}+x^4\varepsilon(x)$$

$$\arctan x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}+x^{2n+2}\varepsilon(x)$$

$$\arg\tanh x = x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+x^{2n+2}\varepsilon(x)$$

$$\arcsin x = x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7}+\cdots+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)\,x^{2n+1}}{2\cdot 4\cdot\ \cdots\ (2n)\cdot(2n+1)}+x^{2n+2}\varepsilon(x)$$

$$\arg\sinh x = x-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7}+\cdots+\frac{(-1)^n\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)\,x^{2n+1}}{2\cdot 4\cdot\ \cdots\ (2n)\cdot(2n+1)}$$
$$+x^{2n+2}\varepsilon(x)$$

6.3 Décomposition des fractions rationnelles : $F(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$

1. **<u>CHERCHER LA PARTIE ENTIERE</u> : si n $\geq$ m**
2. **<u>POLE REEL SIMPLE</u> :** $F(x) = \frac{P(x)}{(x-a)Q(x)}$ *avec* $Q(a) \neq 0$

   Forme de la décomposition : $F(x) = \frac{A}{x-a} + \cdots$ où : $\boxed{A = (x-a)\,F(x)\,|_{x=a}}$

   Autre méthode (si fraction compliquée) : $\boxed{A = \frac{P(a)}{Q'(a)}}$
3. **<u>POLE REEL MULTIPLE</u> :** $F(x) = \frac{P(x)}{(x-a)^k Q(x)}$ *avec* $Q(a) \neq 0$

   Forme de la décomposition : $F(x) = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x-a)^k} + \cdots$

   Poser $y = x - a \rightarrow F = \frac{P_1(y)}{y^k Q_1(y)}$.

   On divise $P_1(y)$ par $Q_1(y)$ selon les puissances <u>croissantes</u> à l'ordre <u>k-1</u>.
4. **<u>POLES COMPLEXES CONJUGUES</u> :**

$$F(x) = \frac{P(x)}{(x^2 + p\,x + q)^k\,Q(x)} \qquad avec \qquad \begin{cases} p^2 - 4q < 0 \\ (a, \overline{a}) \in C^2 \quad racines\ de\ x^2 + px + q \\ Q(a) \neq 0 \end{cases}$$

   (a) $k = 1$

   On décompose dans C et on regroupe les 2 termes obtenus (car $B = \overline{A}$)

   Forme de la décomposition : $F(x) = \left(\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-\overline{a}}\right) + \cdots = \frac{A_1 x + B_1}{x^2+px+q} + \cdots$

   avec : $A_1 = 2Re\,[A]$ et $B_1 = -2Re\,[A\overline{a}]$

   (b) $k \geq 1$, *Q simple*

   On soustrait de F les éléments simples issus de Q $\Rightarrow$ nouvelle fraction simplifiée.

   On se ramène à : $F_1(x) = \frac{P_1(x)}{(x^2+p\,x+q)^k}$. On divise P_1 par $x^2 + px + q$ (selon les puissances <u>décroissantes</u>). Et on recommence.

   (c) $k \geq 2$, *Q moins simple*

   Forme de la décomposition :

$$F(x) = \frac{A_1 x + B_1}{x^2 + px + q} + \frac{A_2 x + B_2}{(x^2 + px + q)^2} + \cdots + \frac{A_k x + B_k}{(x^2 + px + q)^k} + \cdots$$

   On calcule : $\left(x^2 + px + q\right)^k F(x)\Big|_{x=a} \Rightarrow \frac{P(a)}{Q(a)} = A_k a + B_k \Leftrightarrow P(a) = Q(a)\,[A_k a + B_k]$

   or $a^2 = -pa - q$ donc on remplace toutes les puissances de a par une combinaison linéaire de 1 et a.

   On obtient : a.[expression n ° 1 en A_k et B_k] + 1.[expression n ° 2 en A_k et B_k] = 0

   Or 1 et a forment un système linéaire indépendant $\Rightarrow \begin{cases} \text{expression } n°1 = 0 \\ \text{expression } n°2 = 0 \end{cases}$

   On est donc ramené à résoudre un système linéaire en A_k et B_k. On forme ensuite : $F(x) - \frac{A_k x + B_k}{(x^2+px+q)^k}$ et on recommence pour avoir A_{k-1} et B_{k-1} ...

   NB : inutile de déterminer a.
5. **<u>ISSUES DE SECOURS</u>**

   (a) donner à x des valeurs particulières (0 ; 1 ; -1 ...)

   (b) calculer $\lim\limits_{x \to \infty} xF(x)$

   (c) méthode d'identification générale avec coefficients indéterminés

   (d) calculer $(x-a)^k F(x)\Big|_{x=a}$ pour le terme de plus haut degré

   (e) utiliser la parité.

6.4 Fonctions hyperboliques directes

DEFINITIONS :

$$\boxed{\begin{array}{l} \cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2} > 0 \\ \sinh x = \frac{e^x-e^{-x}}{2} \\ \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \\ \coth x = \frac{1}{\tanh x} \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{l} \cos x = \cosh(ix) \\ \cosh x = \cos(-ix) \\ \sin x = -i\sinh(ix) \\ \sinh x = -i\sin(ix) \end{array}}$$

DERIVEES :

fonction	$\sinh x$	$\cosh x$	$\tanh x$	$\coth x$
dérivée	$\cosh x$	$\sinh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$	$\frac{-1}{\sinh^2 x} = 1 - \coth^2 x$

TRIGONOMETRIE HYPERBOLIQUE : $\boxed{\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1}$

$$\boxed{\begin{array}{l} \cosh(a+b) = \cosh a \cosh b + \sinh a \sinh b \\ \cosh(a-b) = \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \\ \sinh(a+b) = \sinh a \cosh b + \cosh a \sinh b \\ \sinh(a-b) = \sinh a \cosh b - \cosh a \sinh b \\ \tanh(a+b) = \frac{\tanh a + \tanh b}{1+\tanh a \tanh b} \end{array}}$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x = 2\cosh^2 x - 1 = 1 + 2\sinh^2 x$$
$$\sinh 2x = 2\sinh x \cosh x$$
$$\tanh 2x = \frac{2\tanh x}{1+\tanh^2 x}$$

6.5 Fonctions hyperboliques réciproques

DEFINITIONS

$$y = \underset{x\in\Re}{\arg\sinh x} \quad \Leftrightarrow x = \underset{y\in\Re}{\sinh y}$$
$$y = \underset{x\geq 1}{\arg\cosh x} \quad \Leftrightarrow x = \underset{y\geq 0}{\cosh y}$$
$$y = \underset{-1<x<1}{\arg\tanh x} \quad \Leftrightarrow x = \underset{y\in\Re}{\tanh y}$$
$$y = \underset{x>1 \ (\text{resp. } x<-1)}{\arg\coth x} \quad \Leftrightarrow x = \underset{y>0 \ (\text{resp. } y<0)}{\coth y}$$

EXPRESSIONS LOGARITHMIQUES

$$\forall x \in \Re,\ \arg\sinh x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$
$$\forall x \geq 1,\ \arg\cosh x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$$
$$\forall |x| < 1\ \ \arg\tanh x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$
$$\forall |x| > 1\ \ \arg\coth x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

DERIVEES

$$(\arg\sinh x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$
$$(\arg\cosh x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$
$$(\arg\tanh x)' = \frac{1}{1-x^2} \quad sur \quad]-1\ ;\ +1[$$
$$(\arg\coth x)' = \frac{1}{1-x^2} \quad sur \quad]-\infty\ ;\ -1[\cup]1\ ;\ +\infty[$$

N.B :

$$\forall x \in]-\infty\ ;\ -1[\cup]1\ ;\ +\infty[\ ,\quad \left(\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|\right)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$
$$\forall x \in \Re\ ,\quad x \neq 1\ ,\quad x \neq -1\ ,\qquad \left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right)' = \frac{1}{1-x^2}$$

6.6 Les coniques

Equation polaire : $\boxed{r = \frac{p}{1+e\cos\theta}}$ **avec :** $\begin{cases} -\pi \leq \theta \leq \pi \\ p > 0 \\ e > 0 \end{cases}$

Selon les valeurs de e, on obtient toutes les coniques :

1. **ellipse : $0 < e < 1$**
2. **parabole : $e = 1$**
3. **hyperbole : $e > 1$**

Equations cartésiennes :

$$\boxed{\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ r^2 = x^2 + y^2 \end{cases}}$$

Donc : $r + e\,r\,\cos\theta = p \quad \Leftrightarrow \quad r = p - e\,x$

$$\Leftrightarrow \quad r^2 = (p - e\,x)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(1 - e^2\right)x^2 + y^2 = p^2 - 2p\,e\,x$$

1. **<u>si $e = 1$</u> :** $\boxed{y^2 = p^2 - 2p\,x}$ **parabole**
2. **si $e \neq 1$:**

$$\left(1 - e^2\right)\underbrace{\left(x + \frac{p\,e}{1 - e^2}\right)}_{X}^2 + y^2 = p^2 + \frac{p^2e^2}{1-e^2} = \frac{p^2}{1-e^2}$$

$$\left(1 - e^2\right)X^2 + y^2 = \frac{p^2}{1-e^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{X^2}{\frac{p^2}{(1-e^2)^2}} + \frac{y^2}{\frac{p^2}{(1-e^2)}} = 1$$

   (a) **<u>si $0 < e < 1$</u> : on pose :** $a^2 = \frac{p^2}{(1-e^2)^2} \quad b^2 = \frac{p^2}{1-e^2}$

   d'où : $\boxed{\frac{X^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$ **ellipse**

   (b) **<u>si $e > 1$</u> : on pose :** $a^2 = \frac{p^2}{(1-e^2)^2} \quad b^2 = \frac{p^2}{e^2-1}$

   d'où : $\boxed{\frac{X^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$ **hyperbole**

Chapitre 7

TRAVAUX PRATIQUES

7.1 Introduction à Matlab

7.1.1 Principales caractéristiques

Matlab est un environnement logiciel de **calcul et visualisation scientifique** :
- Matlab (pour Matrix Laboratory) repose sur un langage **interprété**.
- La programmation est aisée car la syntaxe du langage est proche de l'écriture mathématique.
- La donnée de base est la **matrice** ou tableau (vecteur ou scalaire étant des cas particuliers).
- La dimension des données n'a pas besoin d'être spécifiée (ni leur type).
- L'**interactivité** de Matlab permet de programmer et simuler plus vite qu'en C ou Fortran.
- Matlab est couramment utilisé dans la recherche et l'industrie.
- Les inconvénients éventuels sont la lenteur d'exécution et le coût en mémoire.

Matlab est fourni avec des **Toolboxes** (boîtes à outils) dédiées à des applications spécifiques :
- Ce sont des bibliothèques de fonctions (fichiers ASCII d'extension .M)
- **Symbolic Math** : calcul symbolique (intégrale, équation différentielle)
- **Signal Processing** : traitement de signal (filtrage, analyse spectrale)
- **System Identification** et **Control System** : automatique (identification, correcteur)
- **Image Processing** : traitement d'image

Le système interactif MATLAB comporte 5 parties :
- **Environnement** de développement (fenêtres de commandes)
- **Bibliothèque** de fonctions mathématiques (algèbre, trigonométrie, transformées)
- **Langage** (contrôles de flux, fonctions, structures)
- Commandes **graphiques** (visualisation 2-D et 3-D)
- API de **communication** avec le C et le Fortran

7.1.2 Environnement de travail

7.1.2.1 Session MATLAB

- licence PC sous Windows (jetons)
- double-cliquer sur l'îcone MATLAB pour lancer une session
- fenêtre de **commande** : pour saisir des variables, écrire des instructions, lancer des programmes (après le prompt (») de l'interpréteur Matlab), et voir des résultats en mode texte
- fenêtre d'**éditeur** : pour écrire des fichiers .M
- fenêtre graphique (**Figure**) : pour visualiser des courbes
- répertoire de travail par défaut : work (modifiable dans startup.m)

7.1.2.2 Contrôle de session

- CTRL C : interruption de programme
- exit/quit : fin de session
- ↑ : rappel de commande précédente
- ! : redonner la main au système d'exploitation

- **help <nom de fonction>** : aide en ligne (très utile !)
- who/whos : liste des variables en mémoire
- **clear** : libération de la mémoire vive (très utile !)
- clc : efface la fenêtre de commande.

7.1.3 Langage de programmation

7.1.3.1 Principe de la syntaxe

MATLAB est un langage d'expression, i.e. interprété (pas de compilation nécessaire). Il interprète et évalue en ligne les instructions tapées au clavier.

Une instruction peut être :
- tapée directement dans la fenêtre de **commande** pour exécution en ligne.
- insérée dans un **programme** exécutable (fichier .M)
- insérée dans une **fonction** externe (fichier .M)

Une instruction est constituée de variables, nombres, opérateurs et fonctions. Elle est de la forme :

```
variable=expression;
```

ou simplement :

```
expression;
```

Séparateurs :
- une instruction se termine par un **point-virgule** (;) sauf si l'on veut voir à l'écran tous les calculs intermédiaires auquel cas on utilise à la place le simple retour chariot (<RET>) ou la virgule (,).
- % : séparateur qui annonce un **commentaire** dans un fichier MATLAB.

7.1.3.2 Exemples d'instructions

- formation d'un vecteur-ligne t contenant des instants d'échantillonnage espacés d'une période Te :
  ```
  t=0:Te:T;  %vecteur-temps échantillonné
  ```
- extraction des n premiers échantillons :
  ```
  t(1:n);
  ```
- génération d'un vecteur x contenant les échantillons d'une sinusoïde :
  ```
  x=A*sin(2*pi*f*t);
  ```
  A, π, f étant des scalaires, x récupère la dimension de t (aucune déclaration de type ou de dimension n'est nécessaire).
- transposition pour former le vecteur colonne correspondant :
  ```
  y=x';
  ```
- formation d'une matrice M de taille 3×3 :
  ```
  M=[a11 a12 a13 ; a21 a22 a23 ; a31 a32 a33];
  ```
- extraction du premier coefficient de la matrice :
  ```
  coeff1=M(1,1);
  ```

7.1.3.3 Opérateurs et constantes

```
+   -   *   /   ^   '

.*  ./  .^  .'

==   ~=   >   <   <=   >=

pi  i  j  Inf  NaN
```

7.1.3.4 Contrôle de flux de données

- **for** : répétition d'instuctions un certain nombre de fois. Syntaxe :
```
for variable=scalaire1:scalaire2
  instruction;
end
```
- **if** : exécution conditionnelle d'instructions. Syntaxe :
```
if expression1
   instruction1;
elseif expression2
   instruction2;
end
```
où expression1 et 2 utilisent les tests d'égalité, différence ou inégalité.
- **while** : répétition d'instructions un nombre indéfini de fois.
- Autres instructions conditionnelles classiques : **switch, continue, break**

7.1.3.5 Création d'une fonction externe

L'instruction **function** sert à définir une nouvelle fonction externe qui étend ainsi le vocabulaire de Matlab. Les instructions constituant la fonction sont écrites dans un fichier d'extension .M et de **même nom** que la fonction. La première ligne du fichier contient la définition de la syntaxe de la fonction. Par exemple dans un fichier **newfun.m**, la 1ère ligne :

```
function [out1, out2] = newfun(in1)
```

définit une nouvelle fonction appelée **newfun** qui calcule à partir d'une matrice d'entrée **in1**, deux matrices de sortie **out1** et **out2**. L'appel à cette nouvelle fonction dans un autre programme se fait par :

```
[z,y] = newfun(x);
```

7.1.4 Bibliothèque de fonctions

7.1.4.1 Fonctions graphiques

- **axis** : pour spécifier les limites des axes d'une figure.
- **figure** : ouvre une nouvelle fenêtre graphique (Figures No. 2, 3, etc...) qui devient la fenêtre graphique courante. On peut spécifier le numéro de la fenêtre : figure(1).
- **grid** : ajoute un quadrillage en pointillé sur une figure.
- **hold on/off** : maintien ou non du tracé précédent dans la fenêtre graphique (pour superposer des courbes).
- **plot** : tracé de courbes dans la fenêtre de visualisation. Syntaxe :
```
plot(x, y, 'type', x1,y1,'type1',...);
```
où x est le vecteur des abscisses (facultatif), y le vecteur des ordonnées, 'type' le type ou la couleur du trait (facultatif). On peut spécifier en option l'échelle des axes, les légendes, la grille de façon très souple.
- **print** : impression de la figure sur l'imprimante :
```
print -ddeskjet ou -dlaserjet
```
impression de la figure dans le presse-papier :
```
print -dmeta ou -dbitmap
```
impression de la figure dans un fichier Postscript :
```
print nom_fich -deps
```
- **subplot(m,n,p)** : division d'une Figure en m x n rectangles et tracé dans le p-ième rectangle.
- **title** : ajoute un titre sur une figure.
- **xlabel, ylabel** : ajoute une légende sur l'axe horizontal (resp. vertical) d'une figure.
- **zoom on/off/out** : pour dilater une courbe à l'aide des boutons de la souris.

7.1.4.2 Interaction utilisateur

- **disp** : affichage de texte ou matrices dans la fenêtre de commande. Intérêt : commentaires à l'exécution.
- **echo on/off** : contrôle l'affichage à l'écran des commandes des fichiers d'extension .M lors de leur exécution. Intérêt : pour debugger ou pour un programme de démonstration.
- **input** : après l'affichage d'un message, attente d'une entrée au clavier avec retour chariot. Syntaxe :
  ```
  x = input('message','s');
  ```
  où x récupère la valeur ou la chaîne de caractères entrée au clavier. On rajoute 's' dans le cas où l'entrée au clavier est une chaîne de caractères (string).
- **isempty(x)** : retourne 1 si l'élément est vide, 0 sinon. Utile pour spécifier une valeur par défaut lors d'une entrée au clavier avec input.
- **pause** : arrêt temporaire de l'exécution jusqu'à la frappe d'une touche quelconque au clavier. Cela permet de s'arrêter pour voir à l'écran un graphique.

7.1.4.3 Interaction fichiers externes

- Transfert matrice <-> fichier ASCII : **load/save**
- Entrée/sortie fichier : **fopen, fclose, fread, fwrite, fseek, fprintf**...
- Accès image externe : **imread, imwrite**...

7.1.4.4 Manipulation de matrices

- **length(x)** où x est un vecteur : donne la dimension d'un vecteur.
- **[m n]=size(A)** : récupère les dimensions m et n d'une matrice donnée A.
- **min(x)** : recherche du minimum du vecteur x.

7.1.4.5 Fonctions mathématiques

- **abs** : valeur absolue (resp. module) des éléments d'une matrice réelle (resp. complexe).
- **log(x), log10(x)** : logarithme népérien ou à base 10 des éléments de x.
- autres fonctions de base : **sqrt, exp** ...

7.1.4.6 Signaux de base

- **randn** : génère un bruit aléatoire normal de moyenne nulle et de variance 1. Syntaxe :
  ```
  randn(size(A))
  ```
  pour avoir un vecteur de nombres aléatoires de même taille que A.
- **y=sin(x)** : fonction sinus (qui opère élément par élément dans le cas d'une matrice). où x est un scalaire, un vecteur ou une matrice. y recupère la même dimension que x.
- **square(t,duty)** : génère un signal carré de rapport cyclique variable (fait partie du toolbox Signal Processing) où t est le vecteur-temps et duty le rapport cyclique exprimé en % de la période où le signal est positif (par défaut : duty=50 %).

7.2 TP - Transformée de Fourier

7.2.1 Rappels

- Définition :

$$TF[f(t)] = F(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \exp(-i2\pi\nu t)dt \tag{7.1}$$

- N.B. En prenant $f(t)$ causale et $p = i\omega = i2\pi\nu$, alors on a : TF=TL
- Convolution : $TF[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(\nu).F_2(\nu)$
- Translation : $TF[f(t - t_0)] = \exp(-i2\pi\nu t_0)F(\nu)$
- Modulation : $TF[\exp(i2\pi\nu_0 t)f(t)] = F(\nu - \nu_0)$
- Peigne de Dirac (Formule de Poisson) :

$$TF[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-n)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(-i2\pi\nu n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\nu - n) \tag{7.2}$$

7.2.2 TF Discrète : Analyse spectrale

La TFD est fréquemment utilisée pour l'analyse spectrale des signaux numériques.
On fournit trois fonctions : **sinus, carre, spectre** et un programme : **tfd0**.
Help : **fft, abs, square, log10**

7.2.2.1 Etude du théorème de Shannon

1. Générer le signal SIN1 ; calculer son spectre échantillonné avec une fenêtre rectangulaire (Porte) de longueur 1024 points ; tracer le spectre en dB sur $[0; F_e/2]$.
2. Idem pour SIN2.
3. Comparer et interpréter par rapport à la théorie.
4. Tracer le spectre échantillonné du signal CAR3. Calculer la décroissance des harmoniques. Interpréter en se reportant à la décomposition en série de Fourier d'un signal carré.
5. idem pour les signaux CAR1 et CAR2. Interpréter.

7.2.2.2 Influence de la troncature temporelle

Calculer la TFDT (obtenue par FFT avec zero-padding sur 1024 points qui donne une approximation fine du spectre continu) du signal SIN1 pour une fenêtre temporelle Rectangulaire de 128 points puis 64 points.

Etudier le spectre de SOM1. Quels commentaires peut-on faire à propos de la résolution fréquentielle (c'est-à-dire la capacité à distinguer deux signaux de fréquences proches) et de la résolution dynamique (c'est-à-dire la capacité à distinguer deux signaux d'amplitudes très différentes) de la fenêtre rectangulaire ?

7.2.2.3 Etude de l'écrêtage

Le programme **tfd0** permet d'étudier l'influence spectrale de l'écrêtage d'un signal en choisissant un seuil s.

Générer un signal sinusoïdal tel que : $A = 1$, $f = 10Hz$, $T = 1s$, $Fe = 200Hz$, $s = 0.3$. Interpréter le spectre obtenu en comparant au spectre de la sinsuoïde pure.

7.2.3 Annexes

7.2.3.1 Signaux tests

7.2.3.2 Fonctions internes

- **fft** : calcul de la transfomée de Fourier discrète (TFD) avec l'algorithme rapide de FFT (Fast Fourier Transform) si le nombre de points est une puissance de 2. Sinon, le calcul utilise un

TABLE 7.1 – Signaux tests

Nom	Type de signal	Durée	Fe	Fréq. 1	Amplitude 1	Fréq. 2	Amplitude 2
unité		(s)	(Hz)	(Hz)		(Hz)	
SIN1	sinusoïdal	7	256	100	1	-	-
SIN2	sinusoïdal	7	160	100	1	-	-
CAR1	carré	1	1408	128	1	-	-
CAR2	carré	1	1024	88	1	-	-
CAR3	carré	1	5000	100	1	-	-
SOM1	somme	1	256	100	1	104	1

algorithme plus lent de DFT (Discrete Fourier Transform). C'est pourquoi on a intérêt à choisir un nombre N de points qui est une puissance de 2. Syntaxe :

```
z=fft(x,N);
```

où x est le vecteur contenant les échantillons du signal, N le nombre de points sur lequel on veut calculer la FFT et z est le vecteur de sortie (*a priori* complexe) récupérant les échantillons de la TFD. Signalons que N n'est pas nécessairement égal au nombre d'échantillons du signal. Si N est supérieur au nombre d'échantillons de signal disponibles, le calcul de la TFD se fait après l'ajout automatique du nombre nécessaire d'échantillons nuls en queue de signal pour compléter les échantillons manquant et obtenir au total N points. Cet artifice de calcul, qui s'appelle *zero-padding*, est intéressant pour avoir un spectre discret (TFD) (évidemment, puisqu'on travaille sur ordinateur !) qui est une approximation très fine du spectre continu (TFDT). Typiquement, on prend $N = 1024$. Cela rajoute sur le spectre échantillonné d'origine des points intermédiaires qui réalisent une interpolation en sinus cardinal (donc exacte) entre les points originels, au lieu de l'interpolation linéaire (donc fausse) faite par l'œil. On améliore ainsi la visualisation du spectre, mais cela n'ajoute évidemment pas d'information utile d'un point de vue mathématique.

– **abs** : calcul de la valeur absolue (resp. du module) des éléments d'une matrice réelle (resp. complexe). Par exemple, si l'on veut le spectre Sxx du signal x, on prend le module au carré de sa TFD z :

```
Sxx = abs(z).^2;
```

7.2.3.3 Fonctions externes

– **sinus** : génération d'une sinusoïde. Syntaxe :

```
[x,t] = sinus(Fe,T,f,A)
```

Cette fonction requiert 4 paramètres d'entrée : la fréquence d'échantillonnage F_e, la durée T (en secondes), la fréquence f et l'amplitude A. Elle donne en sortie 2 vecteurs de même dimension : x contient les échantillons du signal sinusoïdal et t contient les instants d'échantillonnage.

– **carre** : génération d'un signal carré. Syntaxe identique à sinus.

– **spectre** : calcul d'un spectre. Syntaxe :

```
[Sxx,freq]=spectre(Fe,x,N,dB)
```

Cette fonction requiert 4 paramètres d'entrée : la fréquence d'échantillonnage F_e, le vecteur des échantillons du signal x, le nombre de points de calcul N et une chaîne de caractères dB (n/o) qui spécifie l'échelle désirée (linéaire ou en dB). Elle donne en sortie 2 vecteurs de dimension N : Sxx contient les échantillons du spectre et $freq$ contient les fréquences discrètes correspondantes (de 0 à F_e).

7.3 TP - Transformée en Z

7.3.1 Rappel sommaire

La TZ est l'équivalent de la TL pour des signaux échantillonnés : $x(t) = x(kT_e) = x(k) = x_k$.
Elle s'obtient à partir de la TL par changement de variable complexe : $z = \exp(pT_e)$.
Elle est définie par :

$$F(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(k) z^{-k} \tag{7.3}$$

z^{-1} est l'opérateur retard.
La fonction de transfert d'un filtre numérique est définie par une fraction rationnelle en z^{-1}.

7.3.2 Synthèse de Filtre RII

On s'intéresse à un filtre numérique dont la fonction de transfert est du type :

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \tag{7.4}$$

On peut le caractériser par ses pôles $p_i = r_i e^{i\theta_i}$ et zéros $z_j = r_j e^{i\theta_j}$, ceci à une constante multiplicative près (facteur de gain qu'on prendra par défaut égal à : $k = 1$).

On supposera que la fréquence d'échantillonnage vaut : $F_e = 10kHz$.

Pour chacun des systèmes ci-dessous, on tracera :
- le position des pôles et zéros dans le plan complexe (help : **pzmap, zgrid, conj**)
- la fonction de transfert (help : **zp2tf, freqz**)
- la réponse impulsionnelle sur 256 points (help : **filter, zeros**)

1. Système avec 2 pôles complexes conjugués : $r_i = 0.99$ et $\theta_i = \pm 10^\circ$.
2. idem pour $r_i = 0.99$ et $\theta_i = \pm 30^\circ$. Commenter l'influence de θ_i.
3. idem pour $r_i = .96$ et $\theta_i = \pm 10^\circ$. Commenter l'influence de r_i.
4. idem pour $r_i = 1$ et $\theta_i = \pm 10^\circ$. Commenter la réponse impulsionnelle.
5. idem pour $r_i = 1.01$ et $\theta_i = \pm 10^\circ$. Commenter la réponse impulsionnelle.
6. Ajouter au système 1) une paire de zéros : $r_j = 0.99$ et $\theta_j = \pm 30^\circ$. Commenter l'influence des zéros.
7. Ecrire l'équation aux différences qui régit le système (expression de l'échantillon de sortie en fonction des échantillons d'entrée et de sortie précédents).

7.3.3 Annexe théorique pour le TP TZ

Cas d'une paire de pôles complexes conjugués :

$$H(z) = \frac{A}{z-p_0} + \frac{A^*}{z-p_0^*} = \frac{Az^{-1}}{1-p_0z^{-1}} + \frac{A^*z^{-1}}{1-p_0^*z^{-1}} \tag{7.5}$$

$$H(z) = \frac{b_1z^{-1}+b_2z^{-2}}{a_0+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}} \text{ avec : } b_1 = 2\Re[A] \text{ et : } b_2 = -2\Re[Ap_0^*] \tag{7.6}$$

$$H(z) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} Ap_0^n z^{-n} + A^*p_0^{*n}z^{-n}\right] z^{-1} \tag{7.7}$$

$$h(n) = h_0(n-1) \tag{7.8}$$

$$h_0(n) = Ap_0^n + A^*p_0^{*n} = 2\Re[Ap_0^n] \text{ pour : } n \geq 0 \tag{7.9}$$

Si l'on pose : $p_0 = r\exp(j\theta)$ et $A = a\exp(j\phi)$, il vient :

$$h_0(n) = 2a.r^n\cos[n\theta+\phi] \tag{7.10}$$

$$h(n) = 2a.r^{n-1}\cos[(n-1)\theta+\phi] \text{ pour : } n \geq 1 \tag{7.11}$$

Correspondant au système analogique :

$$h_0(t) = 2a.r^{t/T_e}\cos[\frac{\theta}{T_e}t+\phi] \tag{7.12}$$

$$H_0(p) = \frac{1}{1+2\frac{\zeta}{\omega_n}p+\frac{1}{\omega_n^2}p^2} \tag{7.13}$$

Et les relations entre paramètres analogiques et numériques :

$$\omega_p = \frac{\theta}{T_e} \tag{7.14}$$

$$\exp(-\zeta\omega_n t) = r^{t/T_e} \Rightarrow -\zeta\omega_n = \frac{\mathrm{Log}(r)}{T_e} \tag{7.15}$$

$$Q = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \tag{7.16}$$

$$\omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2} \tag{7.17}$$

$$\omega_p = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \tag{7.18}$$

Bibliographie

[1] M. Kunt. Techniques modernes de traitement numérique des signaux, volume 1, 2 et 3. Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne, 1991.

[2] Jacques Max and Collaborateurs. Méthodes et techniques de traitement du signal et applications aux mesures physiques, volume 1 et 2. Masson, Paris, 4e edition, 1987.

[3] M. Bellanger. Traitement numérique du signal. Théorie et pratique. Masson, Paris, 5e edition, 1996.

[4] M. Najim. Synthèse de filtres numériques en traitement du signal et des images. Hermes, Lavoisier, Paris, 2004.

[5] Robert Vich. Z Transform Theory and Applications. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1987.

[6] Murray R. Spiegel. Variables complexes, Cours et problèmes. Série Schaum. Mac Graw Hill, 1984.

[7] Abdul J. Jerri. Integral and discrete transforms with applications and error analysis. Marcel Dekker, Inc., New York, 1992.

[8] Pierrette Benoist-Gueutal and Maurice Courbage. Mathématiques pour la physique. Intégrale de Lebesgue, Fonctions analytiques, Espaces normés, volume 1. Eyrolles, Paris, 2nd edition, 1994.

[9] B. Picinbono. Théorie des signaux et des systèmes avec problèmes résolus. Dunod, Paris, 1989.

[10] M. Carbon, D. Ghorbanzadeh, P. Marry, N. Point, and D. Vial. Eléments de mathématiques du signal. Exercices résolus. Dunod, Paris, 1997.

[11] G. Blanchet and M. Charbit. Traitement numérique du signal. Simulation sous Matlab. Hermès, Paris, 1998.